Musterlösung zur Übungsklausur vom 12.06.2007

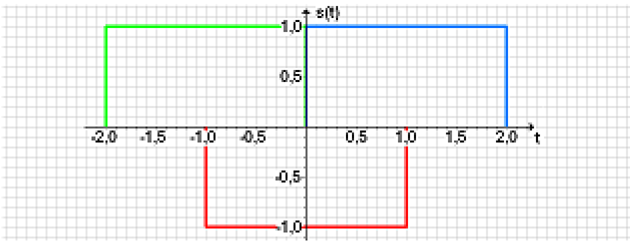
Aufgabe 1
Gegeben ist das Signal $s(t) = rect(t/2 + ½) + rect(t/2 - ½) - rect(t/2)$

1.1)
Das Signal ist zu skizzieren. Man betrachte die einzelnen Terme des Signals. Es sind 3 Rechtecke, die jeweils gedehnt und verschoben sind.

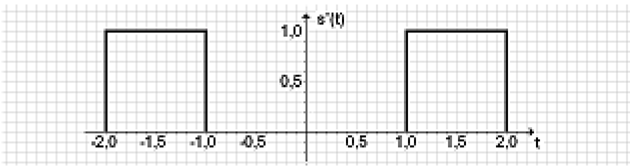
Um die Dehnung und Verschiebung zu bestimmen kann man die Grenzen des Signals betrachten. Das ist bei einem Rechtecksignal -½ und ½ .

1. Term	$t/2+½ = -½$	daraus folgt $t = -2$
	$t/2+½ = ½$	daraus folgt $t = 0$
2. Term	$t/2-½ = -½$	daraus folgt $t = 0$
	$t/2-½ = ½$	daraus folgt $t = 2$
3. Term	$t/2 = -½$	daraus folgt $t = -1$
	$t/2 = ½$	daraus folgt $t = 1$

Daraus folgen die 3 Terme:



Zusammengefasst:



Oder auch: $s(t) = rect(t+1,5) + rect(t-1,5)$

1.2)
Es soll die Ableitung des Signals bestimmt werden. Die Sprungstellen sind dabei speziell zu betrachten. Dazu wurde in der Vorlesung die verallgemeinerte Differentiation eingeführt.

Skript: $d/dt\ \varepsilon(t) = \delta(t)$ Gl. 2.30

Die Ableitung s'(t) ergibt sich wie folgt:

$$\mathbf{s'(t) = \delta(t+2) - \delta(t+1) + \delta(t-1) - \delta(t-2)}$$

Rechnerisch:

$s(t) = rect(t+1,5) + rect(t-1,5)$
$s(t) = \varepsilon(t+2) - \varepsilon(t+1) + \varepsilon(t-1) - \varepsilon(t-2)$

also $s'(t) = \delta(t+2) - \delta(t+1) + \delta(t-1) - \delta(t-2)$

1.3)

Nun ist $g(t) = s(t) * \varepsilon(t)$ zu skizzieren. $\varepsilon(t)$ wirkt wie ein Integrator!

1.4)

Es ist h(t) eines LTI-Systems zu bestimmen! Am Ausgang soll s(t) erscheinen, wenn am Eingang rect(t/2) angelegt wird.

d.h.: $s(t) = \text{rect}(^t/_2) * h(t)$

s(t) eingesetzt: $\text{rect}(^t/_2 + ½) + \text{rect}(^t/_2 - ½) - \text{rect}(^t/_2) = \text{rect}(^t/_2) * h(t)$

Verschiebung herausziehen: $\text{rect}(^t/_2) * \delta(t+1) + \text{rect}(^t/_2) * \delta(t-1) - \text{rect}(^t/_2) * \delta(t) = \text{rect}(^t/_2) * h(t)$

zusammenfassen: $\text{rect}(^t/_2) * [\, \delta(t+1) + \delta(t-1) - \delta(t) \,] = \text{rect}(^t/_2) * h(t)$

VERGLEICHEN: $\text{rect}(^t/_2) * \boldsymbol{[\, \delta(t+1) + \delta(t-1) - \delta(t) \,]} = \text{rect}(^t/_2) * \mathbf{h(t)}$

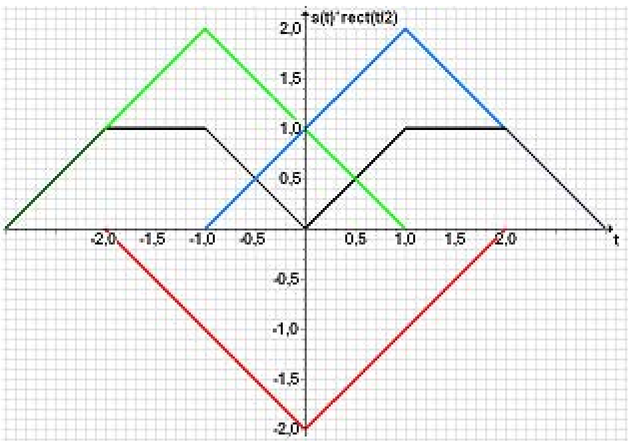
1.5)

Es soll s(t) mit $\text{rect}(^t/_2)$ gefaltet werden. Mit der Schreibweise aus 1.4 für das Signal folgt:

$s(t) = \text{rect}(^t/_2) * [\, \delta(t+1) + \delta(t-1) - \delta(t) \,]$

$s(t) * \text{rect}(^t/_2) = \text{rect}(^t/_2) * [\, \delta(t+1) + \delta(t-1) - \delta(t) \,] * \text{rect}(^t/_2)$
$s(t) * \text{rect}(^t/_2) = \text{rect}(^t/_2) * \text{rect}(^t/_2) * [\, \delta(t+1) + \delta(t-1) - \delta(t) \,]$
$s(t) * \text{rect}(^t/_2) = \boldsymbol{2\, \Lambda(^t/_2) * [\, \delta(t+1) + \delta(t-1) - \delta(t) \,]}$

Dies sind 3 verschobene Dreiecksfunktionen

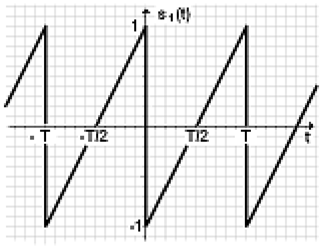


1.6)
Ist das System kausal?

Nein, weil eine Antwort schon vor dem Signal eintreten kann: **$h_1(t) \neq 0$ für $t<0$**

Ist das System stabil?
Ja, weil $h_1(t)$ endlich und begrenzt ist: $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{| h_1(t) | \, dt = 2} < \infty$

<u>Aufgabe 2</u>
Gegeben ist ein periodisches Signal $s_1(t)$



2.1)
Die Symmetrie-Eigenschaften von $s_1(t)$:

Gerade Funktionen (Achsensymmetrie)
Bedingung dafür ist : $s(t) = s(-t) \rightarrow$ ist nicht erfüllt.

Ungerade Funktionen (Punktsymmetrie zum Ursprung)
Bedingung dafür ist : $s(t) = -s(-t) \rightarrow$ ist erfüllt!
Die Funktion ist ungerade.

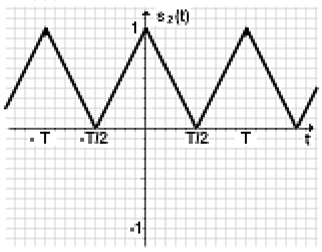
Vollsymmetrie
Bedingung dafür ist : $s(t) = -s(t+T/2) \rightarrow$ ist nicht erfüllt.

Der Gleichanteil = $c_{0\,?}$
Eine ungerade Funktion hat keinen Gleichanteil. Also: $\mathbf{c_0 = 0}$.

Die Bedeutung für die Fourier-Reihen-Koeffizienten a_k und b_k.
Es gilt: $c_k = a_k + j\, b_k$

Bei ungeraden Funktionen hat c_k nur einen Imaginärteil, somit folgt auch $\mathbf{a_k = 0}$;

2.2)
Die Funktion $s_2(t) = |S_1(t)|$ ist gleichgerichtet!

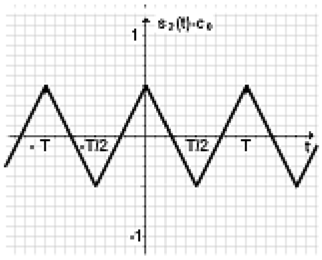


Den Gleichanteil kann man hier ablesen werden, oder über eine Periode integriert werden.

$$C_0 = \int_0^T s_2(t)\, dt = 1/2$$

2.3)
Erneut die Betrachtung der Symmetrie! Einmal mit und einmal ohne Gleichanteil!

Man sieht nun, die **Funktion ist gerade**! Auch ohne Gleichanteil, bleibt sie gerade! Analog zu Teil 2.1 sind alle $\mathbf{b_k = 0}$!



Und nun ist die **Funktion vollsymmetrisch**. $f_2(t) = s_2(t) - c_0$; $f_2(t) = -f_2(t+T/2)$
Daraus folgt alle geraden $\mathbf{a_{2k} = 0}$!

2.4)
Bestimmung von a_k und b_k. - Aus der Formelsammlung:

$$\mathbf{c_k} = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} s_2(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= 1/T \int_{-T/2}^{T/2} s_2(t) \left[\cos(k\omega_0 t) - j \sin(k\omega_0 t) \right] dt$$

$$= 1/T \int_{-T/2}^{T/2} s_2(t)\cos(k\omega_0 t)\, dt - j\, 1/T \int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega_0 t)\, dt \qquad \mathbf{= a_k + jb_k}$$

mit b_k=0 folgt

$$c_k = a_k = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} s_2(t)\cos(k\omega_0 t)\, dt$$

Die Funktion achsensymmetrisch – sowohl s(t) als auch cos(...) !

$$a_k = 2/T \int_{0}^{T/2} (\, 1-t/T/2\,) \cos(k\omega_0 t)\, dt$$

$$a_k = 2/T \int_{0}^{T/2} \cos(k\omega_0 t)\, dt - 4/T^2 \int_{0}^{T/2} t \cos(k\omega_0 t)\, dt \qquad \omega_0 = 2\pi/T$$

$$a_k = 2/T\, 1/k\omega_0 \sin(k\omega_0 t) \Big|_{0}^{T/2} - 4/T^2 \left[1/(k\omega_0)^2 \cos(k\omega_0 t) + 1/k\omega_0\, t \sin(k\omega_0 t) \right]_{0}^{T/2}$$

$$a_k = 0 - 4/T^2 \left[1/(k\omega_0)^2 \cos(k\pi) + 1/k\omega_0\, T/2 \sin(k\pi) - 1/(k\omega_0)^2 \cos(0) - 1/k\omega_0\, 0 \sin(0) \right]$$

$$a_k = - 4/T^2 \left[1/(k\omega_0)^2 \cos(k\pi) + 0 - 1/(k\omega_0)^2\, 1 - 0 \right]$$

$$a_k = - 4/T^2 k^2 \omega_0^2 \left[\cos(k\pi) - 1 \right]$$

$$a_k = \mathbf{1/k^2\pi^2\, (\, 1 - (-1)^k\,)}$$

2.5)
mit $c_k = a_k + j\, b_k$ folgt $\mathbf{c_k} = a_k = \mathbf{1/k^2\pi^2\, (\, 1 - (-1)^k\,)}$

Aufgabe 3

3.1)
Die Aufgabe ist es aus $s(t) = 1/T_1 \, \mathrm{rect}(t/T_1)$ das Fourier-Spektrum $S(j\omega)$ zu bestimmen:

$$\mathbf{S(j\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 1/T_1 \, \mathrm{rect}(t/T_1)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$S(j\omega) = \int_{-T_1/2}^{T_1/2} 1/T_1 \, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$S(j\omega) = \left[1/-j\omega T_1 \, e^{-j\omega t} \right]_{-T_1/2}^{T_1/2}$$

$$S(j\omega) = 1/-j\omega T_1 \left[e^{-j\omega T_1/2} - e^{+j\omega T_1/2} \right]$$

$$S(j\omega) = 2/\omega T_1 \left[- e^{-j\omega T_1/2} + e^{+j\omega T_1/2} \right]/2j$$

$$S(j\omega) = 2/\omega T_1 \sin(\omega T_1/2) = \mathbf{si(\omega T_1/2)}$$

3.2)
Nun sind wieder die Fourier-Reihen-Koeffizienten zu bestimmen von: $\delta_{T2}(t) = \sum \delta(t-nT_2)$

Das Signal ist eine unendliche Folge von Dirac-Impulsen im Abstand T_2!
Damit haben wir ein periodisches Signal mit der Periodenlänge T_2!
Das Integral:

$$\mathbf{d_k} = 1/T_2 \int_{-T_2/2}^{T_2/2} \delta_{T2}(t)\, e^{-jk\omega t}\, dt = 1/T_2 \int_{-T_2/2}^{-T_2/2} \sum \delta(t-nT_2)\, e^{-jk\omega t}\, dt$$

In den Integrationsgrenzen $-T_2/2$ bis $+T_2/2$ bleibt nur ein Dirac-Impuls $\delta(t)$ stehen!

also: $$d_k = 1/T_2 \int_{-T_2/2}^{T_2/2} \delta(t)\, e^{-jk\omega t}\, dt$$

Die Siebeigenschaft des Dirac-Impuls nutzen! Gl 2.31

Es ist noch der Funktionswert zu betrachten, an der Stelle, an der der Dirac Null wird!

damit ist: $$d_k = 1/T_2 \int_{-T_2/2}^{T_2/2} \delta(t-0)\, e^{-jk\omega}\, 0\, dt = 1/T_2 \int_{-T_2/2}^{T_2/2} \delta(t)\, 1\, dt$$

$$= \mathbf{1/T_2}$$ - die Fläche des Dirac genau 1 ist!

3.3)
Es ist $S_P(j\omega)$ zu bestimmen, wobei gilt: $S_P(t)=s(t)*\delta_{T2}(t)$

also **$S_P(j\omega)$** $= s(j\omega)\ \delta_{T2}(j\omega)$

$= si(\omega T_1/2)\ 2\pi/T_2 \sum \delta(\omega-2k\pi/T_2)$

$= 2\pi/T_2 \sum si(\omega T_1/2)\ \delta(\omega-2k\pi/T_2)$

Es müssen nur die Funktionswerte betrachtet werden, an denen ein Dirac-Impuls existiert.

Also bei $\omega-2k\pi/T_2 = 0$ mit $\omega_0 = 2\pi/T_2$

$= \mathbf{2\pi/T_2 \sum si(k\omega_0 T_1/2)\ \delta(\omega-k\omega_0)}$

Zur Bestimmung der c_k die Formelsammlung heranziehen!

Dort steht: $S(j\omega) = 2\pi \sum c_k\ \delta(\omega-k\omega_0)$

Durch Vergleich folgt: $\mathbf{c_k} = 1/T_2\ si(k\omega_0 T_1/2) = \mathbf{1/T_2\ si(T_1/T_2\ \pi k)}$

3.4)
Der Gleichanteil ist c_0! $\rightarrow c_0 = T_2$

3.5)
Es ist nun $T_1 = T_2/2$

$\omega_0 = 2\pi/T_2$
$\omega_g = 3\pi/T_2$

Daraus folgt, dass nur k=0, k=-1 und k=1 übrig bleiben.

$c_k = 1/T_2\ si(T_1/T_2\ \pi k)$
$c_{-1} = 1/T_2\ si(-\pi/2)$
$c_{+1} = 1/T_2\ si(+\pi/2)$
$c_0 = 1/T_2\ si(0)$

$G_P(j\omega) = 2\pi \sum c_k\ \delta(\omega-k\omega_0)$ $k = \{-1;0;1\}$

$= 1/T_2\ 2\pi\ [\delta(\omega) + si(\pi/2)\ \delta(\omega-\omega_0) + si(\pi/2)\ \delta(\omega+\omega_0)]$

$= 1/T_2\ 2\pi\ [\delta(\omega) + si(\pi/2)\ (\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0))]$

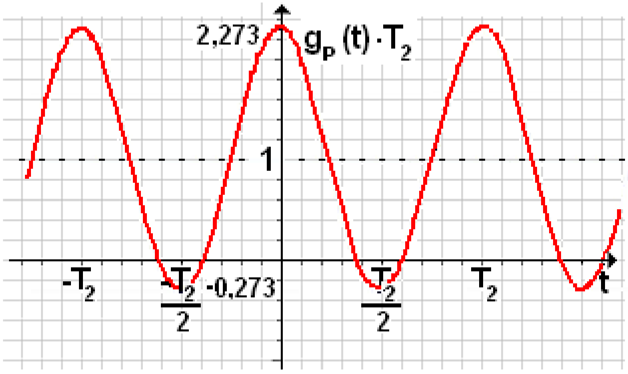
$= 1/T_2\ [2\pi\ \delta(\omega) + 2\pi\ si(\pi/2)\ (\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0))]$

mit $si(\pi/2) = 2/\pi$

$g_P(t)$ $= 1/T_2\ [e^{-j0t} + 2\ si(\pi/2)\ \cos(\omega_0 t)]$

$g_P(t) = 1/T_2 + 2\ 1/T_2\ 2/\pi\ \cos(\omega_0 t) = 1/T_2 + 4/T_2\pi\ \cos(\omega_0 t)$

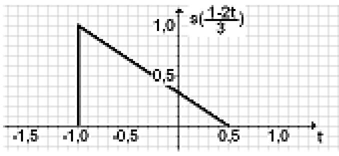
$= 1/T_2 + 2\ 1/T_2\ 2/\pi\ \cos(\omega_0 t) = \mathbf{1/T_2 + 4/T_2\pi\ \cos(2\pi/T_2\ t)}$



<u>Aufgabe</u> 4

4.1)
Bestimmung der Dehnung und der Verschiebung durch ermitteln der Grenzen:

$(1-2t)/3 = 0$ daraus folgt $t = ½$
$(1-2t)/3 = 1$ daraus folgt $t = -1$



4.2)
Es soll bestimmt werden, ob ein System, welches auf s(t) mit g(t) = s(1-2t) reagiert linear und zeitinvariant ist!

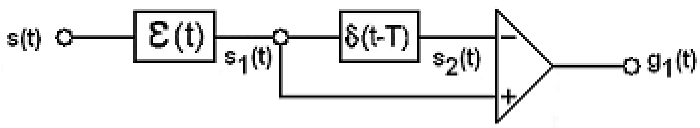
Nach Definition im Skript ist ein System linear wenn gilt:
$Tr\{ \sum a_i\, s_i(t) \} = \sum a_i\ Tr\{ s_i(t) \} = \sum a_i\ g(t)$ Gl.2.7

Eingesetzt: $Tr\{ \sum a_i\, s_i(t) \} = \sum a_i\, s(1-2t) = \sum a_i\, g(t)$ **LINEAR!**

Nach Definition ist ein System zeitinvariant wenn gilt:
$Tr\{ s(t-t_0) \} = g(t-t_0)$ Gl.2.8

Eingesetzt: $Tr\{ s(t-t_0) \} = s(1-2t-t_0)$
Aber: $g(t-t_0) = s(1-2(t-t_0)) = s(1-2t-2t_0)$ **NICHT ZEITINVARIANT!**

4.3)
Jetzt haben wir ein Blockschaltbild gegeben.
Es ist die Impulsantwort h(t) des Gesamtsystems zu ermitteln!

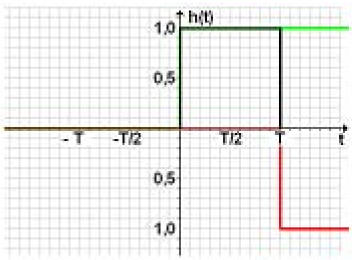


Die Impulsantwort des Systems ergibt sich zu:
$g_1(t) = s_1(t) - s_2(t)$

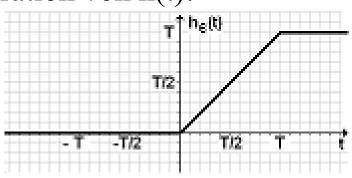
mit: $s_1(t)$ ist $s(t)$ gefaltet mit $\varepsilon(t)$ $\rightarrow s_1(t) = s(t) * \varepsilon(t)$
und: $s_2(t)$ ist $s_1(t)$ gefaltet mit $\delta(t-T)$ $\rightarrow s_2(t) = s_1(t) * \delta(t-T)$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} g_1(t) &= s_1(t) \qquad - s_1(t) * \delta(t-T) \\ &= s(t) * \varepsilon(t) \qquad - s(t) * \varepsilon(t) * \delta(t-T) \\ &= s(t) * [\, \varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\,] \\ &= s(t) * \mathrm{rect}(t-T/2) \\ &= s(t) * h(t) \qquad \rightarrow h(t) \text{ ablesen: } \mathbf{h(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)} \end{aligned}$$



Die Sprungantwort $h_\varepsilon(t)$ ist die Integration von h(t)!



$$\text{Das Ergebnis: } h_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t<0 \\ t & \text{für } 0<t<T \\ T & \text{für } t>T \end{cases}$$

oder $\mathbf{h_\varepsilon(t) = t\,\varepsilon(t) - (t-T)\,\varepsilon(t-T)}$

4.4)
Zum Bestimmen des Faltungsintegral muss eine Fallunterscheidung gemacht werden! Das Integral geht dabei immer über die Funktion t – zu beachten sind sie verschiedenen Abschnitte und Integrationsgrenzen!

$$g_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Für T>=1 **zum Zeitpunkt**

$g_1(t) = 0$ für **$t < 0$**

$g_1(t) = \int_0^t \tau \, d\tau$ **$0 < t < 1$**

$g_1(t) = \frac{1}{2}\tau^2 \Big|_0^t = \frac{1}{2} t^2$

$g_1(t) = 0{,}5$ **$1 < t < T$**

$$g_1(t) = \int_{t-T}^{1} \tau \, d\tau \qquad \mathbf{T < t < 1+T}$$

$$g_1(t) = \frac{1}{2}\tau^2 \Big|_{t-T}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}T^2 + tT$$

$$g_1(t) = 0 \qquad \mathbf{1+T < t}$$

Für T<1 **zum Zeitpunkt**

$$g_1(t) = 0 \text{ für} \qquad \mathbf{t < 0}$$

$$g_1(t) = \int_{0}^{t} \tau \, d\tau \qquad \mathbf{0 < t < T}$$

$$g_1(t) = \frac{1}{2}\tau^2 \Big|_{0}^{t} = \frac{1}{2}t^2$$

$$g_1(t) = \int_{t-T}^{t} \tau \, d\tau \qquad \mathbf{T < t < 1}$$

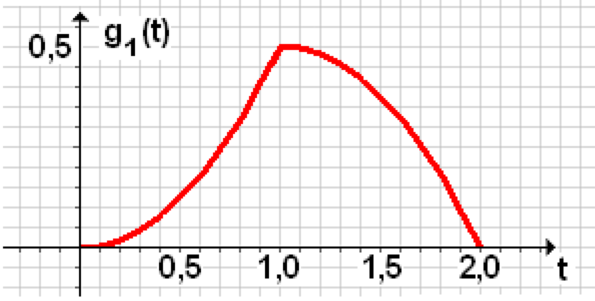
$$g_1(t) = \frac{1}{2}\tau^2 \Big|_{t-T}^{t} = -\frac{1}{2}T^2 + tT$$

$$g_1(t) = \int_{t-T}^{1} \tau \, d\tau \qquad \mathbf{1 < t < 1+T}$$

$$g_1(t) = \frac{1}{2}\tau^2 \Big|_{t-T}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}T^2 + tT$$

$$g_1(t) = 0 \qquad \mathbf{1+T < t}$$

Skizze (für T=1)



4.5)
Die Fläche (für T=1)

$$\mathbf{A} = \int_0^2 g_1(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \tfrac{1}{2} t^2\,dt \quad + \int_1^2 \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} t^2 - \tfrac{1}{2} T^2 + tT\,dt$$

$$= 1/6\, t^3 \Big|_0^1 \quad + \tfrac{1}{2} t - 1/6\, t^3 - \tfrac{1}{2} T^2 + \tfrac{1}{2} t^2 T \Big|_1^2$$

$$= 1/6 \quad + \tfrac{1}{2}\,2 - 1/6\;8 - \tfrac{1}{2}\;2 + \tfrac{1}{2}\;4 \quad - \tfrac{1}{2} + 1/6 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}$$
$$= 1/6 \quad + 1 - 4/3 - 1 + 2 \quad - \tfrac{1}{2} + 1/6$$
$$= -1 + 2 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

<u>Aufgabe 5</u>
Gegeben sind die Polstellen S_P und Nullstellen S_N sowie ein linearer Verstärkungsfaktor F_0. Die Polstellen sind als Kreuze und die Nullstellen als Kreise in der Skizze angegeben.

5.1)
Es soll F(s) bestimmt werden!

Nach Gleichung 5.17 aus dem Skript können wir die Funktion F(s), deren Null- und Polstellen angegeben wie folgt schreiben:

$F(s) = F_0\, \Pi\, (s-s_N) / \Pi(s-s_P)$

Eine Nullstelle ist bei $s_N=0$
Polstellen sind bei $s_{P1} = -2$, $s_{P2} = -1+j$ und $s_{P3} = -1-j$

Eingesetzt ergibt sich: $F(s) = \dfrac{2\,(s-0)}{(s-(-2))\,(s-(-1+j))\,(s-(-1-j))}$

Zusammengefasst: $F(s) = \dfrac{2s}{(s+2)\,(s+1-j)\,(s+1+j)}$

oder auch: $F(s) = \dfrac{2s}{(s+2)\,((s+1)^2+1)}$

5.2)
Gesucht ist eine Partialbruchzerlegung:

Allgemeine Form: $F(s) = A_0 + \sum(A_P/(s-s_P))$ (Skript: Gl.5.35)

In unserem Falle: $F(s) = A_0 + A_1/(s+2) + A_2/(s+1-j) + A_3/(s+1+j)$

Grenzwertbetrachtung zur Bestimmung der Unbekannten:

$$A_0 = \lim_{s \to \infty} F(s)$$

$$A_1 = \lim_{s \to s_{P1}} F(s)*(s-s_{P1}) \qquad \text{u.s.w.}$$

daraus folgt:

$$\mathbf{A_0} = \lim_{s \to \infty} \frac{2\,s}{(s+2)\,(s+1-j)\,(s+1+j)} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A_1} = \lim_{s \to -2} F(s)*(s+2)$$

$$\mathbf{A_1} = \lim_{s \to -2} \frac{2\,s}{(s+1-j)\,(s+1+j)} = \frac{2\,(-2)}{(-1+j)(-1-j)} = \frac{-4}{1+1} = \mathbf{-2}$$

$$\mathbf{A_2} = \lim_{s \to -1+j} F(s)*(s+1-j)$$

$$\mathbf{A_2} = \lim_{s \to -1+j} \frac{2\,s}{(s+2)\,(s+1+j)} = \frac{2\,(-1+j)}{(1+j)(2j)} = \frac{2\,(-1+j)}{2\,(1-j)} = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{A_3} = \lim_{s \to -1-j} F(s)*(s+1+j)$$

$$\mathbf{A_3} = \lim_{s \to -1-j} \frac{2\,s}{(s+2)\,(s+1-j)} = \frac{2\,(-1-j)}{(1-j)(-2j)} = \frac{2\,(-1-j)}{2\,(-1-j)} = \mathbf{1}$$

ALSO

$$\mathbf{F(s)} = -2/(s+2) + 1/(s+1-j) + 1/(s+1+j) \quad = -2/(s+2) + (s+1+j+s+1-j) / ((s+1)^2+1)$$

$$= -2/(s+2) + (2s+2) / ((s+1)^2+1) \quad = \mathbf{2\,[\,-1/(s+2) + (s+1)/((s+1)^2+1)\,]}$$

5.3)
Rücktransformation nach f(t) mit der Formelsammlung:
Konvergenzbereich Re{s}>-1 also auch Re{s}>0

Ablesen: $\mathbf{f(t)} = 2\,[\,e^{-2t}\,\varepsilon(t) + e^{-t}\cos(t)\,\varepsilon(t)\,] = \mathbf{2\,\varepsilon(t)\,(\,e^{-t}\cos(t) - e^{-2t}\,)}$

5.4)
Es wird nun betrachtet: $h(t) = \sin(\pi\, t)\, \mathrm{rect}((t-1)/2)$

Es ist die Übertragungsfunktion H(s) zu berechnen. Die finden wir nun nicht direkt in der Formelsammlung, aber eine ähnliche Funktion mit $\varepsilon(t)$. Also zerlegen wir die Funktion in:

$h(t) = \sin(\pi t)\,\varepsilon(t) - \sin(\pi (t-2))\,\varepsilon(t-2) \quad \rightarrow \quad \mathbf{H(s) = \pi/(s^2+\pi^2)\,(1 - e^{-2s})}$

Oder mit integrieren:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\pi t)\, \mathrm{rect}((t-1)/2)\, e^{-st}\, dt \qquad \text{Das rect-Signal erstreckt sich von 0 bis 2!}$$

$$H(s) = \int_{0}^{2} \sin(\pi t)\, e^{-st}\, dt$$

$$H(s) = e^{-st} /(s^2+\pi^2)\,(-s \sin(\pi t) - \pi \cos(\pi t))\Big|_0^2$$

$$H(s) = e^{-2s} /(s^2+\pi^2)\,(-s \sin(2\pi) - \pi \cos(2\pi)) - e^{-0s} /(s^2+\pi^2)\,(-s \sin(0\pi) - \pi \cos(0\pi))$$

$$H(s) = e^{-2s} /(s^2+\pi^2)\,(0 - \pi) - e^{-0s} /(s^2+\pi^2)\,(0 - \pi)$$

$$H(s) = e^{-2s} /(s^2+\pi^2)\,(-\pi) + 1/(s^2+\pi^2)\,(\pi)$$

$$\mathbf{H(s) = \pi/(s^2+\pi^2)\,(1 - e^{-2s})}$$

5.5)
Die Pole und Nullstellen sind zu skizzieren!

Für die Pole muss der Nenner Null werden! Also: $s^2 + \pi^2 = 0$!
Für die Nullstellen muss H(s) Null werden! Also: $1 - e^{2s} = 0$ oder $1 = e^{2s}$ oder $e^{2(\sigma+j\omega)} = 1$

$\rightarrow \sigma = 0$ und $\omega = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

Die gesamte imaginäre Achse ist von Nullstellen gesäumt. Die Pole werden sie von den Nullstellen aufgehoben. Die gesamte Ebene ist Konvergenzgebiet!