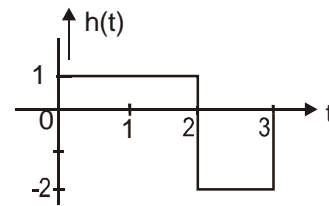


Musterlösung Aufgabe 1

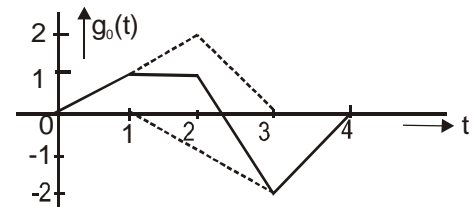
1.1 $s(t) = \varepsilon(t) \Rightarrow g(t) \hat{=} \text{Sprungantwort } h_\varepsilon(t) = \varepsilon(t) * h(t)$

$\Rightarrow h(t) = h_\varepsilon(t) * \delta'(t) = \frac{d}{dt} g(t)$



1.2 $s_0(t) = \text{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)$

$\Rightarrow g_0(t) = g(t) - g(t-1)$



1.3 $g_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(x) \cos(2\pi tx) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi tx) dx$
 $= \frac{1}{2\pi t} [\sin(\pi t) + \sin(\pi t)] = \text{si}(\pi t)$

$g_2(t) = \int_0^1 \cos(2\pi tx) dx = \frac{1}{2\pi t} \sin(2\pi t) = \text{si}(2\pi t)$

1.4 $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_i a_i s_i(x) \right] \cos(2\pi tx) dx = \sum_i a_i \int_{-\infty}^{\infty} s_i(x) \cos(2\pi tx) dx$
 $= \sum_i a_i g_i(t) \Rightarrow \text{linear}$

wegen $s_2(t) = s_1\left(t - \frac{1}{2}\right)$ und $g_2(t) \neq g_1\left(t - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$ nicht zeitinvariant

1.5 $g_3(t) = s_3(t) * h_3(t)$

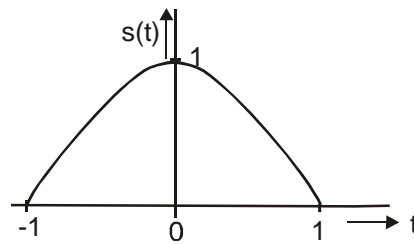
für $t < 0$ $g_3(t) = 0$

für $0 \leq t \leq T$ $g_3(t) = \int_0^t \cos(\pi \tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \sin(\pi t)$

für $t > T$ $g_3(t) = \int_{t-T}^t \cos(\pi \tau) d\tau = \frac{1}{\pi} [\sin(\pi t) - \sin(\pi(t-T))]$

Lösung Aufgabe 2

2.1.



2.2. $s'(t) = -2t \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2}\right); \quad s''(t) = -2 \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2}\right) + 2\delta(t+1) + 2\delta(t-1)$

2.3.

$$\mathcal{F}\{s''(t)\} = -4 \operatorname{si}(\omega) + 2[e^{j\omega} + e^{-j\omega}] = -4[\operatorname{si}(\omega) - \cos(\omega)] = (j\omega)^2 S(j\omega)$$

$$\Rightarrow S(j\omega) = 4 \frac{\operatorname{si}(\omega) - \cos(\omega)}{\omega^2}$$

2.4.

$$P = \frac{2}{2} \int_0^1 (1-t^2)^2 dt = \left[t - 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$$

2.5.

$$c_0 = \frac{2}{2} \int_0^1 (1-t^2) dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$k \neq 0$:

$$c_k = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-t^2) e^{-jk\pi t} dt = \left[\frac{e^{-jk\pi t}}{-2jk\pi} \left(1-t^2 + \frac{2t}{-jk\pi} - \frac{2}{-k^2\pi^2} \right) \right]_{-1}^1$$

$$= -\frac{1}{k^2\pi^2} [e^{-jk\pi} + e^{jk\pi}] = -\frac{2 \cos(k\pi)}{(k\pi)^2} = -\frac{2}{(k\pi)^2} (-1)^k$$

Oder aus 2.3 mit $k\omega_0 = k\pi$:

$$s_p(t) = s(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-2n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_p(j\omega) = S(j\omega) \cdot \frac{2\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\pi)$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{2 \frac{\operatorname{si}(k\pi) - \cos(k\pi)}{(k\pi)^2}}_{c_k} \cdot \delta(\omega - k\pi) \Rightarrow c_k = -\frac{2}{(k\pi)^2} (-1)^k \quad (k \neq 0)$$

Musterlösung Aufgabe 3

3.1 $s_N = 0$; $s_{p_1} = -2$; $s_{p_{2,3}} = \pm j\omega_0$; $Kb : \operatorname{Re}\{s\} > 0$ da kausal

3.2
$$H(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow -2} H(s) \cdot (s+2) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \Big|_{s=-2} = \frac{-2}{4 + \omega_0^2}$$

Koeffizientenvergleich:

$$A(s^2 + \omega_0^2) + (Bs + C)(s+2) = \underbrace{(A+B)}_{=0} s^2 + \underbrace{(C+2B)}_{=1} s + \underbrace{(A\omega_0^2 + 2C)}_{=0}$$

$$\Rightarrow B = -A = \frac{2}{4 + \omega_0^2} \quad C = -\frac{A}{2} \omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{4 + \omega_0^2}$$

$$H(s) = \frac{1}{4 + \omega_0^2} \left[\frac{-2}{s+2} + 2 \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} + \omega_0 \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right]$$

3.3
$$h(t) = \frac{1}{4 + \omega_0^2} \left[-2e^{-2t} + 2 \cos(\omega_0 t) + \omega_0 \sin(\omega_0 t) \right] \varepsilon(t)$$

3.4
$$H_k(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) = (s+1)H_2(s)$$

$$\rightarrow h_k(t) = \frac{d}{dt} h_2(t) + h_2(t) = h_2(t) * [\delta'(t) + \delta(t)]$$

Musterlösung Aufgabe 4

$$\mathbf{4.1} \quad H_1(s) = \frac{1}{s} - 2s \qquad H_2(s) = \frac{2}{1+2s}$$

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) = \frac{1-2s^2}{s\left(s+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\mathbf{4.2} \quad H(s) = \frac{G(s)}{F(s)} = \frac{1-2s^2}{s^2 + \frac{1}{2}s}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{d g(t)}{dt} = f(t) - 2 \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$$

$$\mathbf{4.3} \quad 1-2s^2 = 0 \Rightarrow s_{N_{1,2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$s_{p_1} = 0 \quad ; \quad s_{p_2} = -\frac{1}{2}$$

$$H(s) = -2 \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(s - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{s\left(s + \frac{1}{2}\right)} \Rightarrow H_0 = -2$$

Konvergenzbereich: $\operatorname{Re}\{s\} > 0$

\Rightarrow nicht stabil, da $j\omega$ -Achse nicht im Kb liegt.

$$\mathbf{4.4} \quad H_1(s) = \frac{1}{s} - 2s \xleftrightarrow{\mathcal{L}} h_1(t) = \varepsilon(t) - 2\delta'(t)$$

$$H_2(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{2}} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} h_2(t) = \varepsilon(t) \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{4.5} \quad h(t) &= h_1(t) * h_2(t) = \varepsilon(t) * \left[\varepsilon(t) e^{-\frac{1}{2}t} \right] - 2 \frac{d}{dt} \left[\varepsilon(t) e^{-\frac{1}{2}t} \right] \\ &= \varepsilon(t) \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\tau} d\tau - 2 \left[\delta(t) \cdot e^{-\frac{1}{2}t} + \varepsilon(t) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-\frac{1}{2}t} \right] \\ &= 2\varepsilon(t) \left[1 - e^{-\frac{t}{2}} \right] - 2\delta(t) + \varepsilon(t) e^{-\frac{1}{2}t} \\ &= 2\varepsilon(t) - 2\delta(t) - \varepsilon(t) e^{-\frac{1}{2}t} \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 5

5.1. $H(z) = z^1 - z^{-1} = \frac{z^2 - 1}{z} \Rightarrow z_{N,1/2} = \pm 1; z_p = 0$

Konvergenzgebiet: z-Ebene außer z=0 (weiterer Pol im Unendlichen).

5.2. $H(j\Omega) = e^{j\Omega} - e^{-j\Omega} = 2j \sin \Omega \Rightarrow |H(j\Omega)| = 2|\sin \Omega|; \varphi(\Omega) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\sin \Omega)$

5.3. $s(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} = \operatorname{si} \pi t \Rightarrow s(n) = \delta(n)$

5.4. $g(t) = \frac{d}{dt} s(t) = \frac{\cos \pi t}{t} - \frac{\sin \pi t}{\pi t^2} \Rightarrow g(n) = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$

5.5. $g(t)$ ist wie $s(t)$ auf halbe Abtastfrequenz bandbegrenzt, und stellt das Ergebnis der bandbegrenzten Differentiation von $s(t)$ dar. Damit ist eine eindeutige Rekonstruktion $g(t) = s(t) * h_D(t)$ mittels der abgetasteten Signale $g(n) = s(n) * h_D(n)$ möglich, und da $s(n) = \delta(n)$, ist auch $h_D(n) = g(n)$.