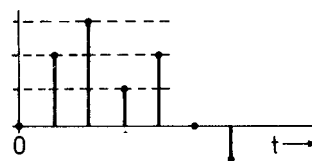
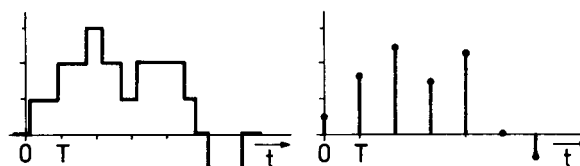
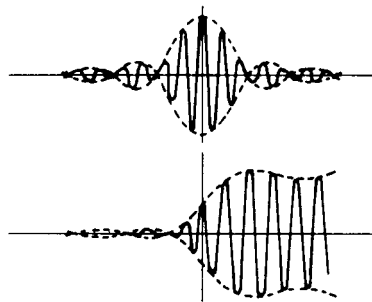
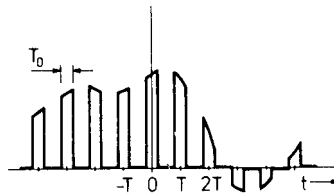


Jens-Rainer Ohm  
Peter Seidler

Zusatzaufgaben zum Selberrechnen

# Grundgebiete der Elektrotechnik IV

Signale, Systeme und Netzwerke



Sommersemester 2007

**Zu Kapitel 2**

**2.1.** Es sei  $s(t) = 0$  für  $t < 3$ . Geben Sie für jedes der im Folgenden definierten Signale die Bereiche an, in denen sie ebenfalls Null sind:

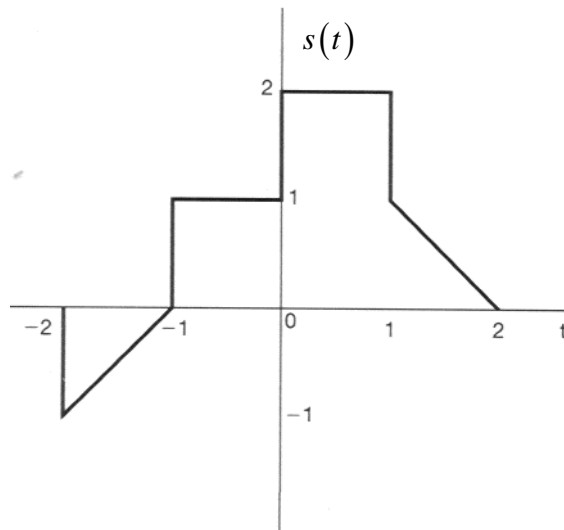
- a)  $s(1-t)$       b)  $s(1-t) + s(2-t)$       c)  $s(1-t) s(2-t)$       d)  $s(3t)$       e)  $s(t/3)$

**2.2.** Drücken Sie den Realteil der folgenden Signale jeweils in der Form  $Ae^{-at}\cos(\omega t + \varphi)$  aus, wobei  $A, a, \omega$  und  $\varphi$  reell seien,  $A \geq 0$  und  $-\pi < \varphi \leq \pi$ :

- a)  $s_1(t) = -2$       b)  $s_2(t) = \sqrt{2}e^{j\pi/4} \cos(3t + 2\pi)$   
 c)  $s_3(t) = e^{-t} \sin(3t + \pi)$       d)  $s_4(t) = je^{(-2+j100)t}$

**2.3.** Ein zeitkontinuierliches Signal ist in Abb. 2.1 gezeigt. Skizzieren Sie unter Angabe aller charakteristischen Werte die folgenden Signale:

- a)  $s(t-1)$       b)  $s(2-t)$       c)  $s(2t+1)$       d)  $s\left(4 - \frac{t}{2}\right)$   
 e)  $[s(t) + s(-t)]\varepsilon(t)$       f)  $s(t) \left[ \delta\left(t + \frac{3}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{3}{2}\right) \right]$ .



**Abb. 2.1.**

**2.4.** Bestimmen und skizzieren Sie (unter Angabe aller charakteristischen Werte) die geraden und ungeraden Komponenten der in Abb. 2.2 gezeigten Signale.

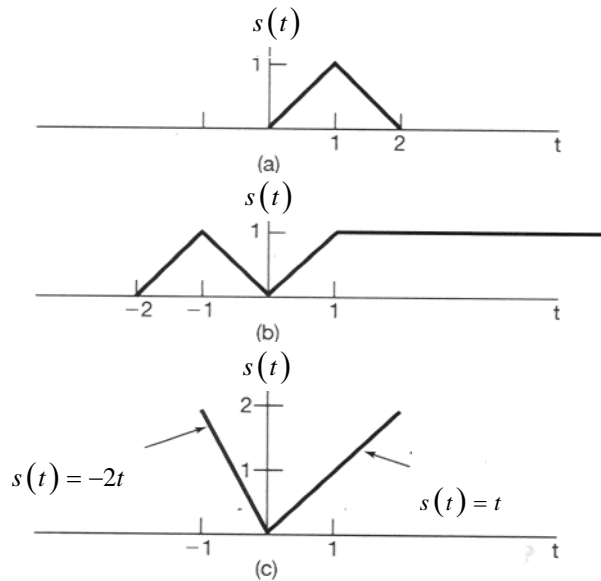


Abb. 2.2.

- 2.5. Betrachten Sie ein LTI-System, dessen Antwort auf  $s_1(t)$  das Signal  $g_1(t)$  in Abb. 2.3 dargestellt ist. Leiten Sie hieraus die Systemantworten auf  $s_2(t)$  und  $s_3(t)$  her, und skizzieren Sie diese unter Angabe aller charakteristischen Werte.

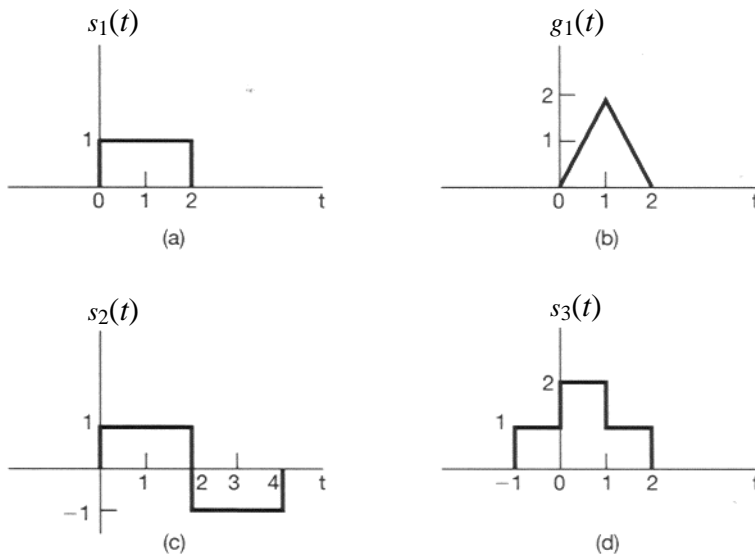


Abb. 2.3.

- 2.6. Zeigen Sie unter Verwendung des Grenzüberganges

$$\delta(t) = \lim_{T_0 \rightarrow 0} \frac{1}{T_0} \text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right), \text{ dass } \delta(2t) = \frac{1}{2} \delta(t).$$

- 2.7. Ist das System linear und/oder zeitinvariant, welches durch die folgende Differentialgleichung beschrieben wird?

$$g(t) = t^2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + t \frac{ds(t)}{dt}$$

- 2.8. Bestimmen und skizzieren Sie (unter Angabe aller charakteristischen Werte) das Ergebnis der Faltung

$$g(t) = \text{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right) * \text{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right) * [\delta(t+2) + 2\delta(t+1)].$$

- 2.9. Es sei  $s(t) = \text{rect}(t)$  und  $h(t) = s(t/\alpha)$  mit  $0 < \alpha \leq 1$ . Bestimmen und zeichnen Sie (unter Angabe aller charakteristischen Werte)  $g(t) = s(t) * h(t)$ .

- 2.10. Bestimmen Sie durch Berechnung des Faltungsintegrals die Ausgangssignale  $g(t) = s(t) * h(t)$  in folgenden Fällen. Skizzieren Sie die Ergebnisse unter Angabe aller charakteristischen Werte:

a)  $s(t) = e^{-\alpha t} \varepsilon(t)$  ;  $h(t) = e^{-\beta t} \varepsilon(t)$  (für Fälle  $\alpha = \beta$  und  $\alpha \neq \beta$ )

b)  $s(t) = \varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-2) + \varepsilon(t-5)$  ;  $h(t) = e^{2t} \varepsilon(1-t)$

c)  $s(t)$  und  $h(t)$  wie in Abb. 2.4 a-c dargestellt.

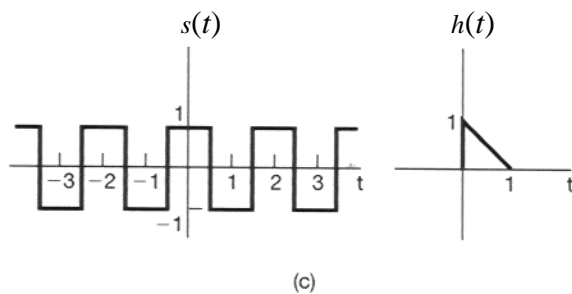
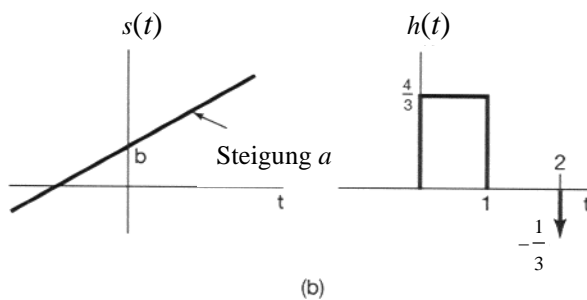
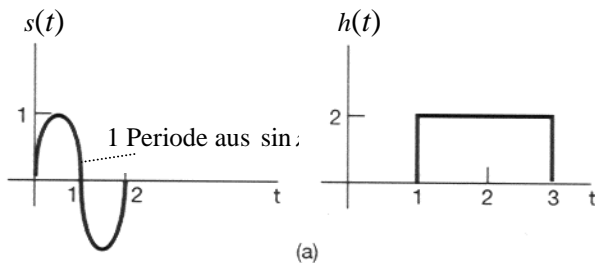


Abb. 2.4.

- 2.11. Es sei  $h(t)$  der in Abb. 2.5a dargestellte Dreiecksimpuls, und  $s(t)$  die in Abb. 2.5b gezeigte Dirac-Impulsfolge. Bestimmen Sie  $g(t) = s(t) * h(t)$  für die folgenden Werte von  $T$ :

a)  $T = 4$       b)  $T = 2$       c)  $T = 3/2$       d)  $T = 1$

Für welches  $T$  ergibt sich ein konstantes  $g(t) = 2$  ?

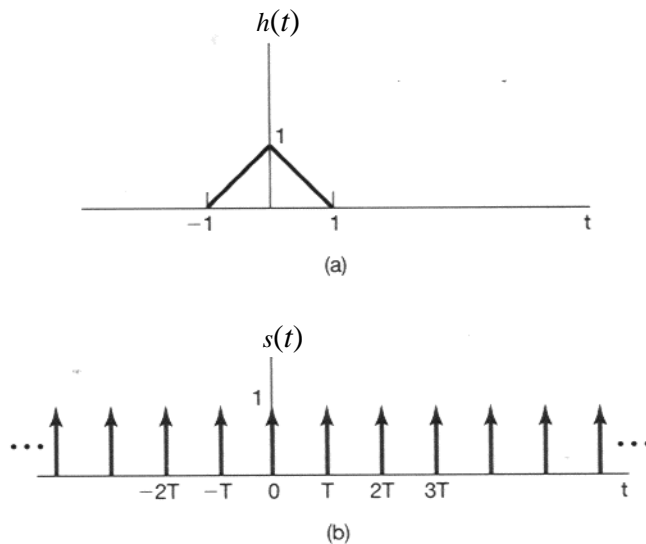


Abb. 2.5.

2.12. Man betrachte ein LTI-System, dessen Eingangs-/Ausgangsverhalten durch die folgende Gleichung beschrieben wird:

$$g(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} s(\tau - 2) d\tau .$$

- Wie lautet die Impulsantwort  $h(t)$  des Systems?
- Ermitteln Sie das Ausgangssignal, wenn das in Abb. 2.6 dargestellte Eingangssignal eingespeist wird.

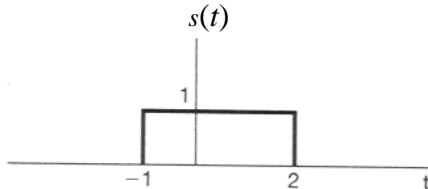


Abb. 2.6.

2.13. Das Signal  $s(t) = \text{rect}(t)$  werde in ein System der Impulsantwort  $h(t) = e^{j\omega_0 t}$  eingespeist.

Ermitteln Sie einen Ausdruck für Werte  $\omega_0$ , so dass  $g(t) = s(t) * h(t) = 0$ .

2.14. Wenn  $s(t) = 0$  für  $|t| > T_1$  und  $h(t) = 0$  für  $|t| > T_2$ , dann gilt auch  $g(t) = s(t) * h(t) = 0$  für  $|t| > T_3$ . Geben Sie  $T_3$  in Abhängigkeit von  $T_1$  und  $T_2$  an.

2.15. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Beziehungen:

a)  $g(t) = s(t) * h(t) = s'(t) * h_\varepsilon(t)$

b)  $g(t) = s'(t) * h(t) = s(t) * h'(t)$

c)  $g(t) = \left[ \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right] * h'(t) = \int_{-\infty}^t [s'(\tau) * h(\tau)] d\tau = s'(t) * \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$

Sind die Regeln der Differentiation und Integration eines algebraischen Produkts (z.B. Produktregel) auf das Faltungsprodukt anwendbar?

**Zu Kapitel 3**

**3.1.** Ein Signal  $s(t)$  ist reellwertig und periodisch mit  $T = 8$ . Die Fourier-Reihenkoeffizienten sind = 0 bis auf  $c_1 = c_{-1} = 2$  und  $c_3 = c_{-3}^* = 4j$ . Geben Sie  $s(t)$  in der Form (3.18) an.

**3.2.** Es sei  $s_1(t)$  ein periodisches Signal mit Grundfrequenz  $\omega_1$  und Fourier-Reihenkoeffizienten  $c_k^{(1)}$ . Wie groß ist die Grundfrequenz  $\omega_2$  des Signals  $s_2(t) = s_1(1-t) + s_1(t-1)$ ? Geben Sie weiter die Fourier-Reihenkoeffizienten  $c_k^{(2)}$  dieses Signals an.

**3.3.** Folgende Informationen seien über ein Signal  $s(t)$  verfügbar:

a)  $s(t)$  ist reellwertig und ungerade.

b)  $s(t)$  ist periodisch mit  $T = 2$  und besitzt Fourier-Reihenkoeffizienten  $c_k$ .

c)  $c_k = 0$  für  $|k| > 1$ .

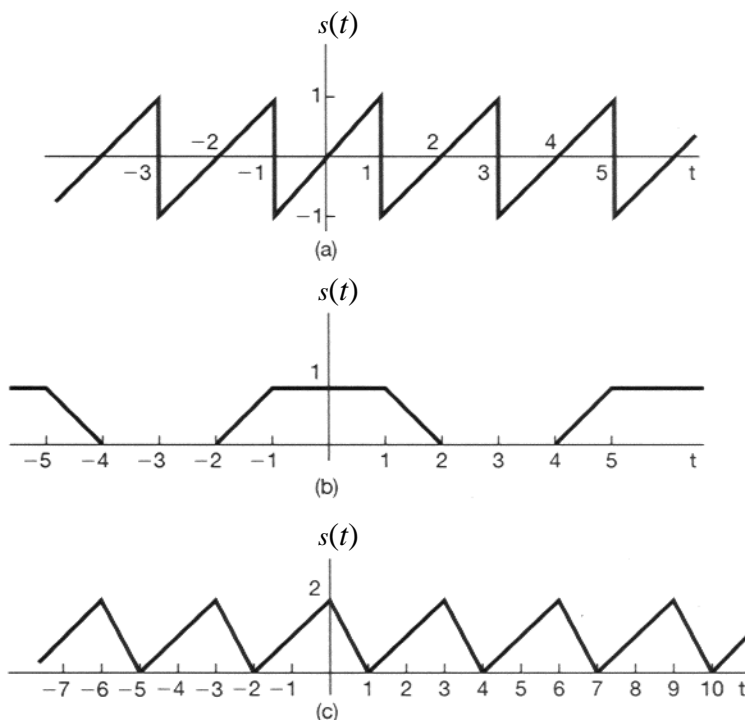
d)  $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 s^2(t) dt = 1$ .

Geben Sie 2 verschiedene Signale an, die diese Bedingungen erfüllen. Kann es weitere Signale geben?

**3.4.** Bestimmen Sie die Fourier-Reihenkoeffizienten der folgenden periodischen Signale:

a) Gemäß Abb. 3.1 a-f.

b)  $s(t)$  sei periodisch mit  $T = 2$  und  $s(t) = e^{-t}$  für  $-1 < t < 1$



**Abb. 3.1 a-c.**

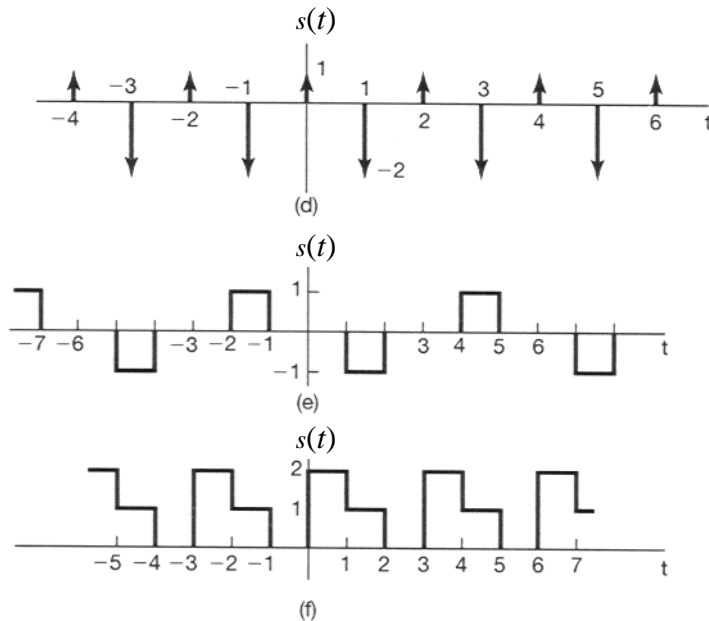


Abb. 3.1 d-f.

3.5. Ein LTI-System besitzt die Impulsantwort  $h(t) = e^{-4|t|}$ . Bestimmen Sie die Fourier-Reihenrepräsentation der Ausgangssignale bei folgenden Eingängen (alle mit Periode  $T = 1$ ):

a)  $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n)$

b)  $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(t - n)$

c)  $s(t) = \text{rect}(2t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n)$

3.6. Es sei  $s(t)$  ein periodisches Signal mit Periode  $T$  und Fourier-Reihenoeffizienten  $c_k$ . Bestimmen Sie die Fourier-Reihenoeffizienten zu den folgenden Signalen:

a)  $s(t - t_0) + s(t + t_0)$

b)  $s(t) + s(-t)$

c)  $s(t) + s(t - T/2)$

d)  $\frac{d^2 s(t)}{dt^2}$

e)  $s(3t - 1)$

3.7. Man betrachte das Signal  $s(t) = \cos(2\pi t)$ . Dieses Signal ist mit  $T=1$  periodisch, wofür die Fourier-Reihenoeffizienten  $c_k$  bestimmt seien. Es ist aber auch mit jeder anderen ganzzahligen Periode  $N$  periodisch. Wie ändern sich die  $c_k$ , wenn man von einer Grundperiode  $T = N$  ausgeht?

3.8. Verwenden Sie das Fourier-Integral (3.46), um die Fourier-Transformierten folgender Signale zu bestimmen:

a)  $s(t) = \delta(t + 1) + \delta(t - 1)$

$$b) s(t) = \frac{d}{dt} [\varepsilon(-2-t) + \varepsilon(t-2)]$$

Skizzieren Sie die Betragsamplituden unter Angabe aller charakteristischen Werte.

**3.9.** Man betrachte das Rampensignal

$$s(t) = \begin{cases} 0, & t < -\frac{1}{2} \\ t + \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1, & t > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

a) Verwenden Sie die Integrations- und Differentiationseigenschaften der Fourier-Transformation, um einen geschlossenen Ausdruck für das Fourier-Spektrum  $S(j\omega)$  zu finden.

b) Beschreiben Sie das Signal durch Faltung eines Rechteckimpulses mit einer geeigneten zweiten Funktion.

c) Wie lautet die Fourier-Transformierte von  $g(t) = s(t) - \frac{1}{2}$  ?

**3.10.** Man betrachte das Signal

$$s(t) = \begin{cases} \frac{t+1}{2}, & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

a) Ermitteln Sie einen geschlossenen Ausdruck für das Spektrum  $S(j\omega)$  unter Verwendung der Fourier-Transformationstabellen.

b) Überprüfen Sie, ob der Realteil des Ergebnisses aus a) der Fourier-Transformierten der geraden Komponente von  $s(t)$  entspricht.

**3.11.**  $s(t)$  sei ein komplexwertiges Signal, dessen Fourier-Transformierte lautet

$$S(j\omega) = \delta(\omega - \pi) + \delta(\omega - 5).$$

Weiterhin sei ein LTI-System mit Impulsantwort  $h(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)$  gegeben.

a) Ist  $s(t)$  periodisch?

b) Ist  $s(t) * h(t)$  periodisch?

c) Kann die Faltung zweier aperiodischer Signale ein periodisches Ergebnis haben?

**3.12.** Es sei  $s(t)$  ein Signal mit Fourier-Spektrum  $S(j\omega)$ . Die folgenden Informationen sind bekannt:

a)  $s(t)$  ist reellwertig

b)  $s(t)$  ist kausal, d.h.  $s(t) = 0$  für alle  $t < 0$ .

$$c) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}\{S(j\omega)\} e^{j\omega t} d\omega = |t| e^{-|t|}.$$

Geben Sie  $s(t)$  an.

**3.13.** Berechnen Sie die Fourier-Transformierten der folgenden Signale:

$$a) s(t) = \left[ e^{-at} \cos \omega_0 t \right] \varepsilon(t), \quad a > 0$$

$$b) s(t) = e^{-3|t|} \sin 2t$$

Zusatzaufgaben zum Selberrechnen Grundgebiete Elektrotechnik IV“

c)  $s(t) = \begin{cases} 1 + \cos \pi t, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

d)  $s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \delta(t - kT), \quad T > 0, |b| < 1$

e)  $s(t) = [te^{-2t} \sin 4t] \varepsilon(t)$

f)  $s(t) = \text{si}(\pi t) \frac{\sin[2\pi(t-1)]}{\pi(t-1)}$

g)  $s(t)$  wie in Abb. 3.2a

h)  $s(t)$  wie in Abb. 3.2b

i)  $s(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

j)  $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|t-2n|}$

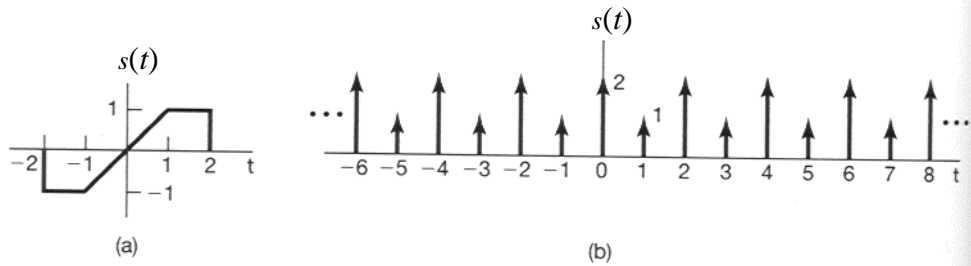


Abb. 3.2.

**Zu Kapitel 4**

- 4.1. Ein Modell für die Generierung von Echos ist gegeben durch die Systemgleichung  $g(t) = s(t) + \alpha \cdot g(t - T)$ . Demnach stellt jede weitere Reflexion eine rückgekoppelte Version von  $g(t)$ , verzögert um  $T$  Sekunden und abgeschwächt um den Faktor  $\alpha$  (typisch  $0 < \alpha < 1$ ) dar.
- a) Geben Sie die Impulsantwort des Systems an (dieses sei anfänglich im Ruhezustand, d.h.  $g(t) = 0$  für  $t < 0$ , sofern ebenfalls  $s(t) = 0$  für  $t < 0$ ).
- b) Zeigen Sie, dass das System für  $|\alpha| \geq 1$  instabil wäre.
- c) Geben Sie ein inverses System an, mit dem eine Echokompensation, d. h. Rekonstruktion von  $s(t)$  aus  $g(t)$ , möglich wird.

- 4.2. Ein ideales Tiefpass-Filter besitzt die Grenzfrequenz  $\omega_g = 100$ . Ein periodisches Signal  $s(t)$  mit Periode  $T = \pi / 6$  wird auf das System gegeben. Am Ausgang wird ein Signal  $g(t) = s(t)$  beobachtet. Welche Fourier-Reihenkoeffizienten  $c_k$  des Eingangssignals sind mit Sicherheit = 0 ?

- 4.3. Finden Sie die Impulsantwort eines Systems mit der Fourier-Übertragungsfunktion

$$H(j\omega) = \frac{\sin^2(3\omega) \cdot \cos \omega}{\omega^2}.$$

- 4.4. Man betrachte ein kausales LTI-System mit der Fourier-Übertragungsfunktion

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}.$$

Für ein bestimmtes Eingangssignal  $s(t)$  wird am Ausgang das folgende Signal beobachtet:

$$g(t) = e^{-3t} \varepsilon(t) - e^{-4t} \varepsilon(t).$$

Bestimmen Sie  $s(t)$ .

- 4.5. Man betrachte ein LTI-System mit der Impulsantwort

$$h(t) = \frac{\sin(4(t-1))}{\pi(t-1)}.$$

Bestimmen Sie die Ausgangssignale bei folgenden Eingangssignalen:

- a)  $s_1(t) = \cos\left(6t + \frac{\pi}{2}\right)$       b)  $s_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \sin(3kt)$
- c)  $s_3(t) = \frac{\sin(4(t+1))}{\pi(t+1)}$       d)  $s_4(t) = \left(\frac{\sin(2t)}{\pi t}\right)^2.$

**Zu Kapitel 5**

**5.1.** Ein Signal sei definiert als  $f(t) = e^{-5t} \varepsilon(t) + e^{-\beta t} \varepsilon(t)$ . Geben Sie die möglichen Wertebereiche der Real- und Imaginärteile von  $\beta$  an, wenn bekannt ist, dass die Laplace-Transformierte  $F(s)$  im Gebiet  $\text{Re}\{s\} > -3$  konvergiert.

**5.2.** Wie viele verschiedene Signale können die folgende Laplace-Transformierte besitzen:

$$F(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)(s^2+s+1)}?$$

Geben Sie jeweils die zugehörigen Konvergenzgebiete an.

**5.3.** Ermitteln Sie die die Impulsantwort zu einem System mit der Laplace-Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{2(s+2)}{s^2+7s+12} \quad ; \quad \text{Re}\{s\} > -3.$$

Lässt sich das System durch geeignete Zusammenschaltung von RC-Tiefpässen und Verstärkerelementen realisieren?

**5.4.** Es sei  $g(t) = f(t) + \alpha f(-t)$  und  $f(t) = \beta e^{-t} \varepsilon(t)$ . Die Laplace-Transformierte von  $g(t)$  ist

$$G(s) = \frac{s}{s^2-1} \quad ; \quad -1 < \text{Re}\{s\} < 1.$$

Ermitteln Sie die Werte von  $\alpha$  und  $\beta$ .

**5.5.** Über ein Signal  $f(t)$  sei bekannt:

a) Das Signal ist reellwertig und gerade.

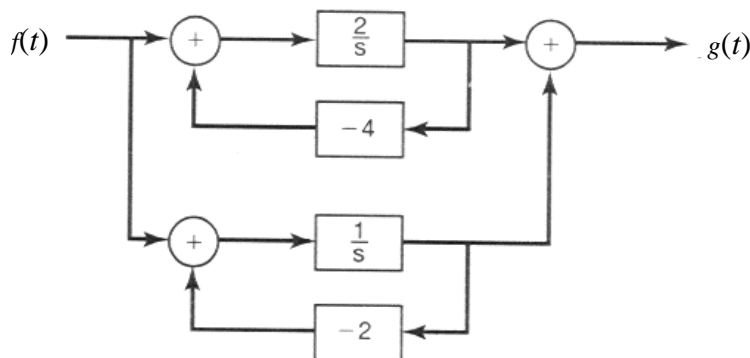
b)  $F(s)$  besitzt 4 Polstellen, alle Nullstellen liegen im Unendlichen.

c) Einer der Pole liegt bei  $s_p = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$ .

d)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 4$ .

Bestimmen Sie  $F(s)$  sowie das Konvergenzgebiet.

**5.6.** Die Blockdiagramm-Repräsentation eines LTI-Systems ist in Abb. 5.1 dargestellt. Geben Sie eine Differentialgleichung an, welche das Eingangs-/Ausgangsverhalten des Systems beschreibt.



**5.7.** Ermitteln Sie die Laplace-Transformierten und die zugehörigen Konvergenzgebiete sowie die Pol-/Nullstellen-Diagramme für die nachfolgend aufgeführten Zeitfunktionen:

a)  $f(t) = e^{-2t} \varepsilon(t) + e^{-3t} \varepsilon(t)$

b)  $f(t) = e^{-4t} \varepsilon(t) + e^{-5t} \sin(5t) \varepsilon(t)$

c)  $f(t) = e^{2t} \varepsilon(-t) + e^{3t} \varepsilon(-t)$

d)  $f(t) = t e^{-2|t|}$

e)  $f(t) = |t| e^{-2|t|}$

f)  $f(t) = |t| e^{2t} \varepsilon(-t)$

g)  $f(t) = \text{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)$

h)  $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$

i)  $f(t) = \delta(t) + \varepsilon(t)$

j)  $f(t) = \delta(3t) + \varepsilon(3t)$

**5.8.** Man betrachte ein LTI-System, dessen Eingangs-/Ausgangsverhalten durch die folgende Differentialgleichung bestimmt ist:

$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} - \frac{dg(t)}{dt} - 2g(t) = f(t).$$

a) Geben Sie  $H(s)$  in der Polynomform an. Skizzieren Sie unter Angabe aller charakteristischen Werte die Pol- und Nullstellenlagen in der  $s$ -Ebene.

b) Ermitteln Sie  $h(t)$  für die folgenden Fälle: *i*) Das System sei stabil *ii*) Das System sei kausal *iii*) Das System sei weder stabil noch kausal.

**Zu Kapitel 6**

**6.1.** Ein diskretes Signal sei

$$s(n) = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta(n-1-k).$$

Bestimmen Sie die Werte für  $M$  und  $n_0$  so, dass  $s(n)$  wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$s(n) = \varepsilon(Mn - n_0).$$

**6.2.** Man betrachte ein zeitdiskretes LSI-System  $L$  mit Eingang  $s(n)$  und Ausgang  $g(n)$ . Dieses System wird durch eine Reihenschaltung zweier Systeme  $L_1$  und  $L_2$  realisiert. Die Eingangs-/Ausgangsbeziehungen dieser beiden Systeme sind jeweils

$$L_1: g_1(n) = 2s_1(n) + 4s_1(n-1)$$

$$L_2: g_2(n) = s_2(n-2) + \frac{1}{2}s_2(n-3).$$

a) Bestimmen Sie die Eingangs-/Ausgangsbeziehung des Systems  $L$  und geben Sie dessen Impulsantwort  $h(n)$  an.

b) Ändert sich  $h(n)$ , wenn die Reihenfolge der Systeme vertauscht wird?

**6.3.** Überprüfen Sie die folgenden Signale auf Periodizität. Wenn ein Signal periodisch ist, geben Sie seine Periodenlänge an.

a)  $s(n) = \sin\left(\frac{6\pi}{7}n + 1\right)$       b)  $s(n) = \cos\left(\frac{n}{8} - \pi\right)$       c)  $s(n) = \cos\left(\frac{\pi}{8}n^2\right)$

d)  $s(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

e)  $s(n) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{6}\right).$

**6.4.** Es sei  $s(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) - \delta(n-3)$  und  $h(n) = 2\delta(n+1) + 2\delta(n-1)$ . Bestimmen und skizzieren Sie die Ergebnisse der folgenden Faltungen:

a)  $g(n) = s(n) * h(n)$       b)  $g(n) = s(n+2) * h(n)$       c)  $g(n) = s(n) * h(n+2).$

**6.5.** Berechnen und skizzieren Sie (unter Angabe aller charakteristischen Werte) das Ergebnis der Faltung  $g(n) = s(n) * h(n)$ , wobei

$$s(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} \varepsilon(-n-1) \quad \text{und} \quad h(n) = \varepsilon(n-1).$$

**6.6.** Es seien drei LSI-Systeme hintereinander geschaltet, wie in Abb. 6.1a dargestellt. Eine der Teil-Impulsantworten sei gegeben als  $h_2(n) = \varepsilon(n) - \varepsilon(n-2)$ . Beobachtet wird das Ausgangssignal in Abb. 6.1b.

a) Bestimmen Sie die Impulsantwort  $h_1(n)$ .

b) Bestimmen Sie die Antwort des Gesamtsystems auf  $s(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$ .

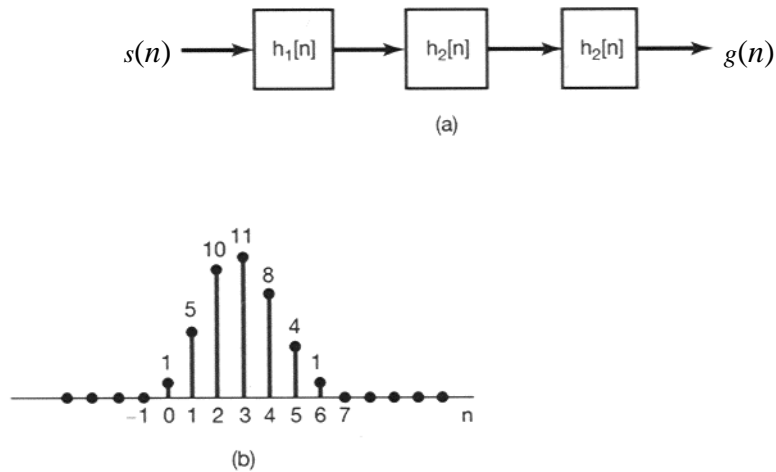


Abb. 6.1.

- 6.7.** Ein Kredit von 100.000 € soll durch gleiche Monatsraten von  $E$  € zurückgezahlt werden. Der jährliche Zinssatz beträgt 12 %, und die angefallenen Zinsen werden jeweils am Monatsende hinzugerechnet. Der Kredit wird im Monat  $n=0$  aufgenommen, die Rückzahlung soll im Monat  $n=1$  beginnen.
- Beschreiben Sie das Problem mittels einer Differenzgleichung, wobei  $g(n)$  die nach erfolgter Monatszahlung  $s(n) = -E$  € verbliebene Restschuld darstellt (der Anfangszustand sei  $g(0) = 100.000$  €).
  - Wie groß muss  $E$  sein, damit der Kredit nach 30 Jahren (360 Monaten) zurückgezahlt ist?
  - Wie groß ist dann die Summe der insgesamt an die Bank gezahlten Zinsen?
- 6.8.** Bestimmen Sie die DFT-Koeffizienten für die folgenden diskreten periodischen Signale. Verwenden Sie jeweils eine DFT-Länge über  $M$  Abtastwerte, die der Periode des Signals entspricht. Skizzieren Sie für jeden Fall unter Angabe aller charakteristischen Werte die Betragsamplituden und Phasen.
- $s(n)$  wie in Abb. 6.2 a-c dargestellt.
  - $s(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$
  - $s(n)$  periodisch mit  $M = 4$  und  $s(n) = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$  für  $0 \leq n \leq 3$ .
  - $s(n)$  periodisch mit  $M = 12$  und  $s(n) = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$  für  $0 \leq n \leq 11$ .

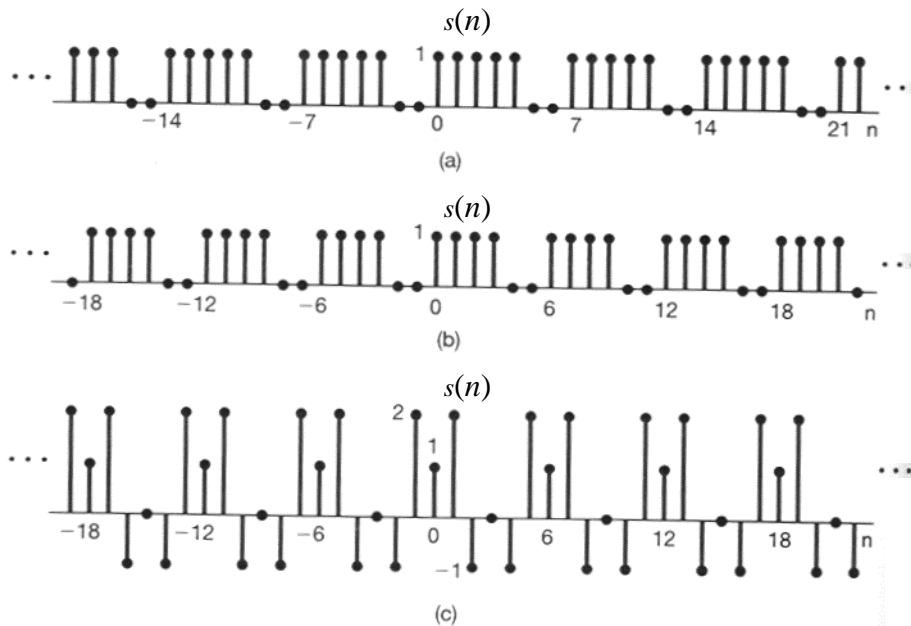
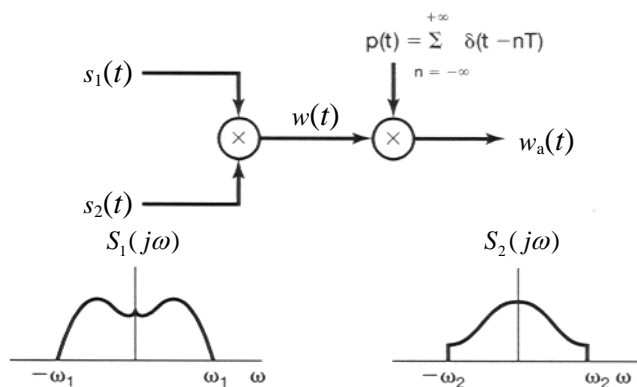


Abb. 6.2.

6.9. In dem in Abb. 6.3 gezeigten System werden zwei Signale  $s_1(t)$  und  $s_2(t)$  multipliziert, und das Produktsignal  $w(t)$  mittels einer Dirac-Impulsfolge mit Abtastabstand  $T$  ideal abgetastet. Die Signale sind bandbegrenzt auf  $\omega_1$  bzw.  $\omega_2$ . Geben Sie den maximal möglichen Abtastabstand  $T$  an, bei dem das Signal  $w(t)$  noch aus  $w_a(t)$  mittels idealer Tiefpass-Filterung rekonstruiert werden kann.



6.10. Das Signal  $g(t)$  ist das Faltungsprodukt zweier bandbegrenzter Signale  $s_1(t)$  und  $s_2(t)$ , d.h.  $g(t) = s_1(t) * s_2(t)$ . Es gelte  $S_1(j\omega) = 0$  für  $|\omega| \geq 1000\pi$  und  $S_2(j\omega) = 0$  für  $|\omega| \geq 2000\pi$ . Das Signal  $g(t)$  wird mittels einer Dirac-Impulsfolge mit Abtastabstand  $T$  ideal abgetastet. Geben Sie an, bei welchen Abtastabständen  $T$  das Signal  $g(t)$  noch aus  $g_a(t)$  mittels idealer Tiefpass-Filterung rekonstruiert werden kann.

6.11. Ermitteln Sie die  $z$ -Transformierten der folgenden Abtastwertfolgen in geschlossener Form. Skizzieren Sie unter Angabe aller charakteristischen Werte die Pol-/Nullstellendiagramme sowie die Konvergenzgebiete in der komplexen  $z$ -Ebene.

- a)  $s(n) = \delta(n + 5)$       b)  $s(n) = \delta(n - 5)$       c)  $s(n) = (-1)^n \varepsilon(n)$

$$\text{d) } s(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \varepsilon(n+3) \quad \text{e) } s(n) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \varepsilon(-n-2) \quad \text{f) } s(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \varepsilon(3-n)$$

$$\text{g) } s(n) = 2^n \varepsilon(-n) + \left(\frac{1}{4}\right)^n \varepsilon(n-1) \quad \text{h) } s(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \varepsilon(n-2)$$

**6.12.** Ermitteln Sie die Abtastwertfolgen im Zeitbereich zu den folgenden  $z$ -Transformierten.

$$\text{a) } S(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}, |z| > \frac{1}{2} \quad \text{b) } S(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}, |z| < \frac{1}{2} \quad \text{c) } S(z) = \frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$$

$$\text{d) } S(z) = \frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{2} \quad \text{e) } S(z) = \frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}, |z| > \frac{1}{2}$$

$$\text{f) } S(z) = \frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}, |z| < \frac{1}{2}$$

**6.13.** Über ein zeitdiskretes Signal  $s(n)$  sind folgende Eigenschaften bekannt:

- $s(n)$  ist reellwertig und rechtsseitig.
- Die  $z$ -Transformierte besitzt 2 Polstellen.
- Es liegen 2 Nullstellen im Ursprung der  $z$ -Ebene.

d) Eine der Polstellen liegt bei  $z = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{3}}$ .

e)  $X(1) = 8/3$ .

Geben Sie  $X(z)$  und das Konvergenzgebiet an.

**6.14.** Man betrachte die folgenden  $z$ -Übertragungsfunktionen zeitdiskreter Systeme:

$$H_1(z) = \frac{1}{\left(1-z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1-\frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{9}z^{-2}\right)} \quad ; \quad H_2(z) = \frac{1}{\left(1-z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2}\right)}$$

- Geben Sie die Differenzgleichungen an.
- Geben Sie für die Realisierung als IIR-Filter mit  $P=4$  die Filterkoeffizienten  $b_p$  an.
- Zeichnen Sie ein Blockdiagramm für die Realisierung als Hintereinanderschaltung zweier IIR-Filter mit jeweils  $P=2$ , und geben Sie die Filterkoeffizienten  $b_p$  an.
- Lassen sie die Gesamtsysteme auch als Hintereinanderschaltung von vier IIR-Filtern mit  $P=1$  und reellwertigen Filterkoeffizienten realisieren?

**6.15.** Man betrachte eine gerade Abtastwertfolge, d.h.  $s(-n) = s(n)$ .

a) Zeigen Sie, dass für gerade Folgen allgemein gilt:  $S(z) = S(z^{-1})$ .

b) Begründen Sie mit dem Ergebnis aus a), dass jeweils Paare von Polen an Positionen  $z_P$  und  $1/z_P$ , bzw. Paare von Nullstellen an Positionen  $z_N$  und  $1/z_N$  auftreten müssen.

c) Ermitteln Sie die Positionen der Pole und Nullstellen für die geraden Folgen

$$s_1(n) = \delta(n+1) + \delta(n-1) \quad ; \quad s_2(n) = \delta(n+1) - \frac{5}{2}\delta(n) + \delta(n-1),$$

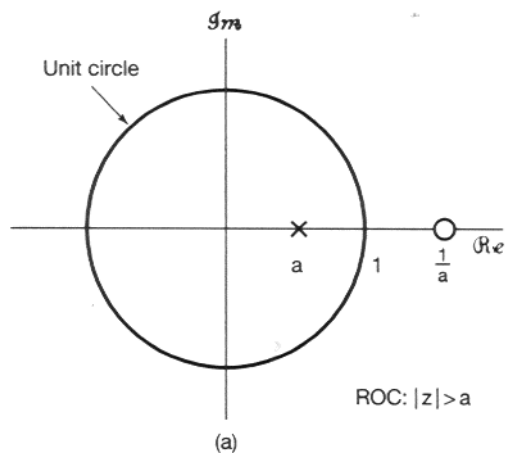
und überprüfen Sie, ob die in b) gezeigte Eigenschaft gilt.

- 6.16.** Geben Sie an (mit Begründung), welche der folgenden  $z$ -Transformierten kausale (jedoch nicht notwendigerweise stabile) LSI-Systeme, realisierbar mittels FIR- und IIR-Filterstrukturen, ausdrücken können:

$$H_1(z) = \frac{(1-z^{-1})^2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad ; \quad H_2(z) = \frac{(z-1)^2}{z-\frac{1}{2}} \quad ; \quad H_3(z) = \frac{\left(z-\frac{1}{4}\right)^5}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^6} \quad ; \quad H_4(z) = \frac{\left(z-\frac{1}{4}\right)^6}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^5}$$

Kann man durch Analyse der Ordnungen von Zähler- und Nennerpolynomen sofort erkennen, ob ein System kausal realisierbar ist?

- 6.17.** Zeigen Sie, dass ein zeitdiskretes System mit dem in Abb. 6.3 gezeigten Pol-Nullstellendiagramm ein Allpass-System ( $|H(j\Omega)| = \text{const.}$ ) ist.



**Abb. 6.3.**