RWTH

LEHRSTUHL
UND INSTITUT FÜR
NACHRICHTENTECHNIK

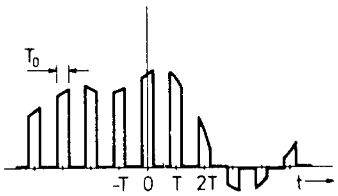
Jens-Rainer Ohm
Peter Seidler

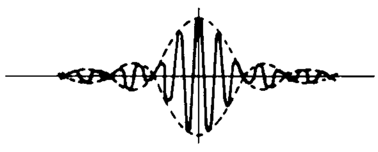
Lösungen
zu den Aufgaben zur Vorlesung

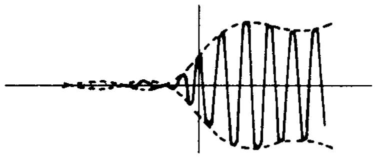
Grundgebiete

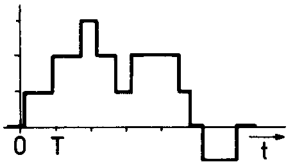
der Elektrotechnik IV

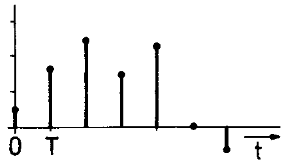
Signale, Systeme und Netzwerke

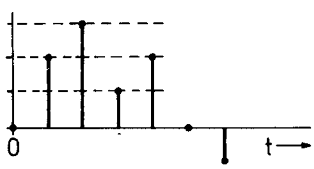












Sommersemester 2007

Aufgabe 1.1

$$u_1(t) = R\,i(t) + u_2(t) \quad \text{mit} \qquad i(t) = \frac{1}{L}\int u_2(t)\,dt$$

$$\Rightarrow u_1(t) = \frac{R}{L}\int u_2(t)\,dt + u_2(t)$$

Lineare Systeme:

mit $u_1(t) = Be^{j\omega t}$ („Eigenfunktion“) $\Rightarrow u_2(t) = B\cdot H(j\omega)e^{j\omega t}$

damit:

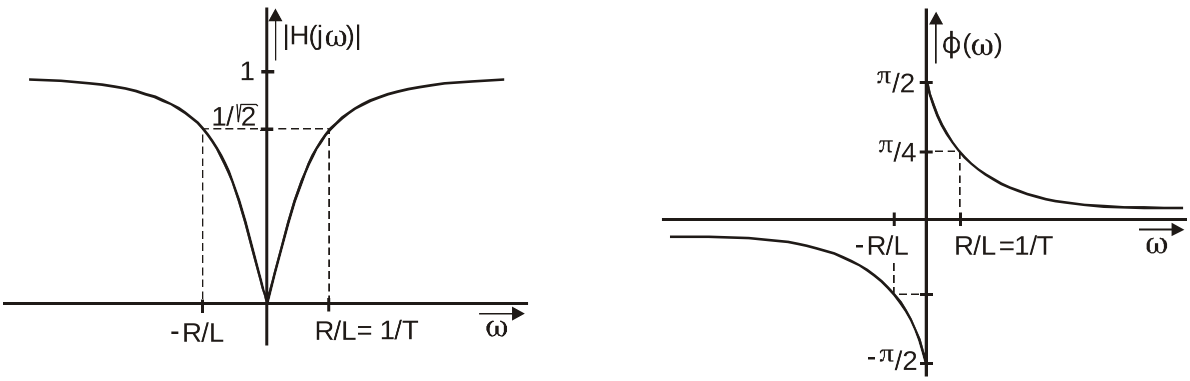
$$H(j\omega) = \frac{1}{1+\dfrac{R}{j\omega L}} = \frac{j\omega T}{1+j\omega T} \quad \text{mit} \quad T = \frac{L}{R}$$

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{|\omega T|}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} = \sqrt{H(j\omega)\cdot H^*(j\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{H(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{H(j\omega)\}}\right) \pm k(\omega)\cdot\pi \qquad \text{mit } k(\omega) = \begin{cases} 0 & \operatorname{Re}\{H(j\omega)\} \geq 0 \\ 1 & \operatorname{Re}\{H(j\omega)\} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{\omega T}\right)$$

RL – Hochpass



Aufgabe 1.2

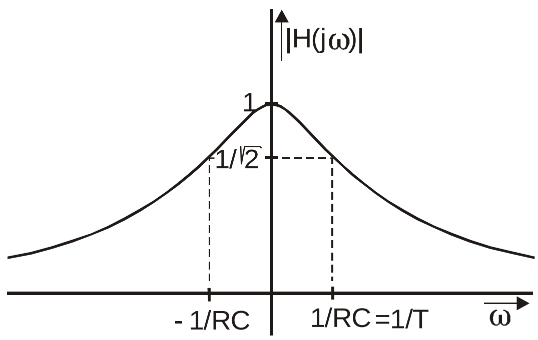
$$u_1(t) = i(t)\cdot R + u_2(t) \qquad \text{mit} \qquad i(t) = C\,\frac{d\,u_2(t)}{dt}$$

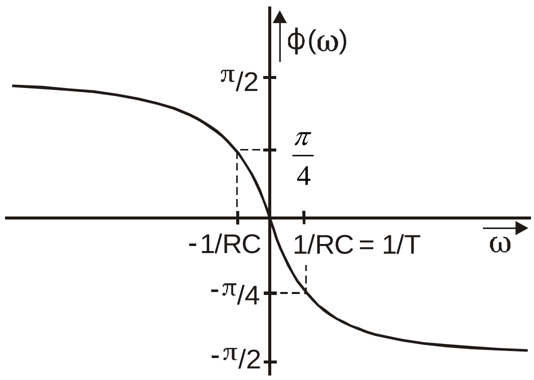
$$\Rightarrow u_1(t) = R\cdot C\,\frac{d\,u_2(t)}{dt} + u_2(t) \qquad \text{mit} \qquad u_1(t) = B\cdot e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow \text{(s. A1)} \qquad H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC} \qquad T = R\cdot C$$

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}} \qquad \varphi(\omega) = \arctan(-\omega T)$$

$RC-$ Tiefpass





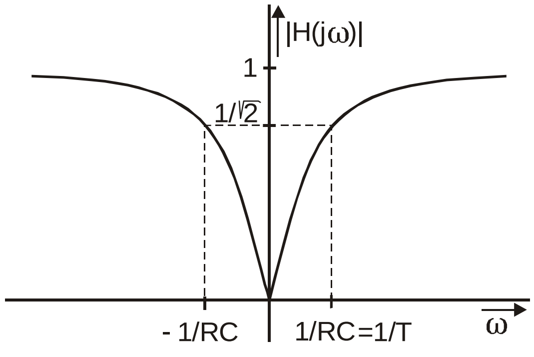
Aufgabe 1.3

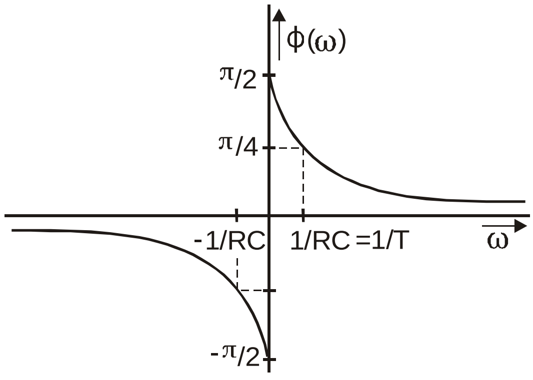
$$u_1(t) = \frac{1}{RC}\int u_2(t)\,dt + u_2(t) \qquad \text{mit} \qquad u_1(t) = B\,e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1+j\omega RC} = \frac{j\omega T}{1+j\omega T} \qquad T = RC$$

Ergebnisse wie Aufgabe 1.1

Hier $RC-$Hochpass





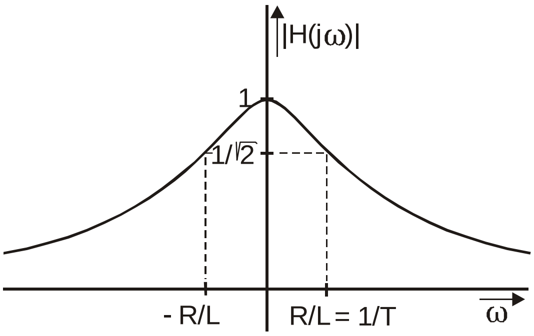
Aufgabe 1.4

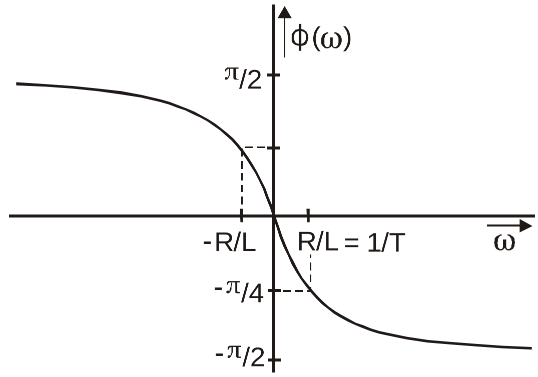
$$u_1(t) = \frac{L}{R}\frac{d\,u_2(t)}{dt} + u_2(t) \qquad \text{mit Eigenfunktion}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\frac{L}{R}} = \frac{1}{1 + j\omega T} \qquad T = \frac{L}{R}$$

weitere Ergebnisse wie Aufgabe 1.2

hier: $L/R-$Tiefpass



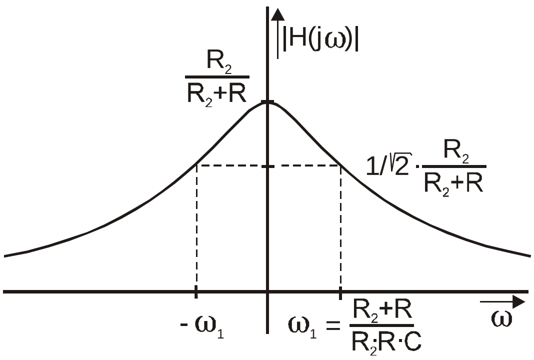


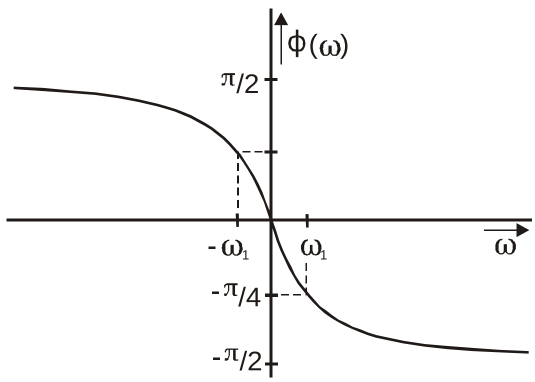
Aufgabe 1.5

$$u_1(t) = RC\,\frac{d\,u_2(t)}{dt} + \left(\frac{R}{R_2} + 1\right)u_2(t)$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{R_2}\right) + j\omega RC}$$

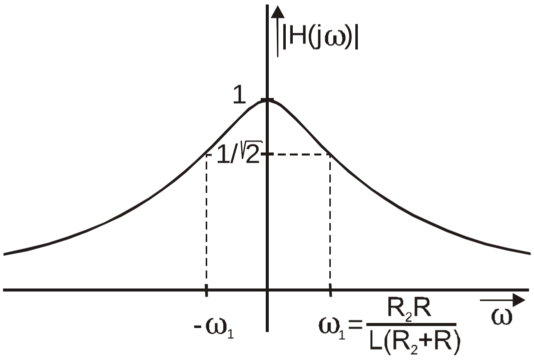
$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{1 + R/R_2}\sqrt{\frac{1}{1 + \left(\omega C\,\frac{R\cdot R_2}{R + R_2}\right)^2}} \qquad \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega RC}{1 + \frac{R}{R_2}}\right)$$

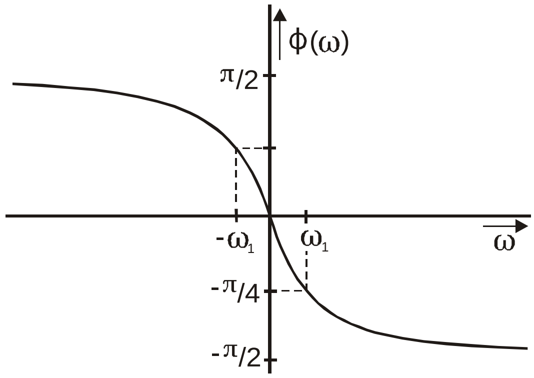




Aufgabe 1.6

$$H(j\omega) = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} = \frac{\dfrac{R \cdot R_2}{R + R_2}}{j\omega L + \dfrac{R \cdot R_2}{R + R_2}} = \frac{1}{1 + j\omega L \cdot \dfrac{(R + R_2)}{R \cdot R_2}}$$





Aufgabe 1.7

a) $$H''(j\omega) = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_0(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega\, C(Z_0 + R)}$$

$$\omega_1 = 2\pi \cdot 20\,kHz \qquad \frac{\left|H''(j\omega_1)\right|}{\left|H''(j0)\right|} = 0{,}9225$$

b) $$H''(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{Z_0 + R}{Z_2}\right) + j\omega C(Z_0 + R)}$$

$$\frac{\left|H''(j\omega_1)\right|}{\left|H''(j0)\right|} = 0{,}91$$

Aufgabe 1.8

$$\underline{U}_a(j\omega) = R \cdot \frac{R}{2R + j\omega L} \cdot \frac{R}{R + j\omega L + \dfrac{R(R + j\omega L)}{2R + j\omega L}} \cdot \underline{I}_0(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{R^3}{(R + j\omega L)(3R + j\omega L)} = \frac{R^3}{3R^2 - \omega^2 L^2 + j\omega 4LR}$$

Aufgabe 1.9

$$u_1(t) = \hat{u}_1 \cos(\omega t + \varphi_1) = \mathrm{Re}\left\{\hat{u}_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)}\right\}$$

$$u_2(t) = \mathrm{Re}\left\{\hat{u}_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} \cdot H(j\omega)\right\} \qquad \text{mit} \qquad H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\phi(j\omega)}$$

$$\Rightarrow u_2(t) = \hat{u}_1 |H(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi_1 + \phi(j\omega))$$

Aufgabe 1.10 (Hochpass!)

Nach Aufgabe 1.1: $\quad |H(j\omega)| = \dfrac{\omega T}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \quad \varphi(\omega) = \arctan\left(\dfrac{1}{\omega T}\right)$

$$T = \frac{L}{R} = 1\mu s \qquad \omega_0 \cdot T = 2\pi 100 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} = 0,2 \cdot \pi$$

a) $\quad |H(j\omega_0)| = 0,532 \qquad \varphi(\omega_0) \approx 57,85^\circ$

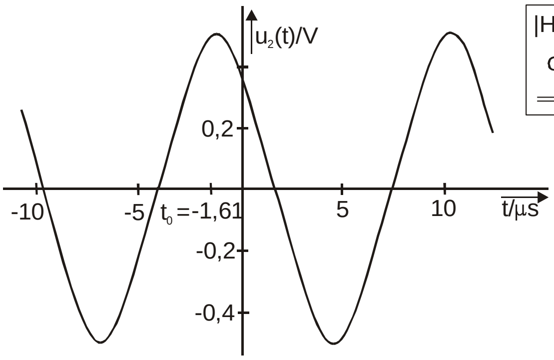
$\quad |H(j3\omega_0)| = 0,883 \qquad \varphi(3\omega_0) \approx 27,95^\circ$

b)
$$\begin{aligned} u_2(t) &= |H(j\omega_0)| \cdot 1V \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)) - |H(j3\omega_0)| \cdot 0,3V \cdot \cos(3\omega_0 t + \varphi(3\omega_0)) \\ &= |H(j\omega_0)| \cdot 1V \cdot \cos(\omega_0 (t + t_0)) - |H(j3\omega_0)| \cdot 0,3V \cos(3\omega_0 (t + t_1)) \end{aligned}$$

$$t_0 = \frac{\varphi(\omega_0)}{\omega_0} \approx 1,61 \cdot 10^{-6} s \qquad t_1 = \frac{\varphi(3\omega_0)}{3\omega_0} \approx 0,259 \cdot 10^{-6} s$$

c) $\quad \omega_0 >> \dfrac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad |H(j\omega_0)| \approx \text{konstant} \rightarrow 1 \qquad \varphi(\omega_0) < \pi/8$

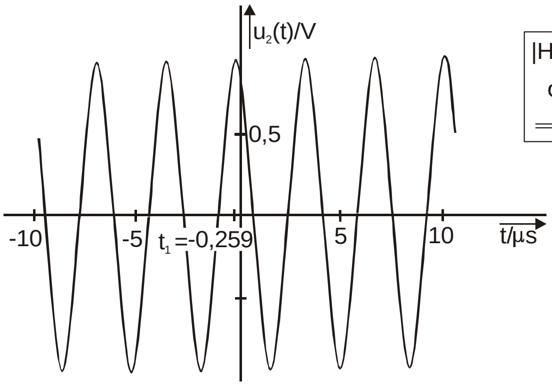
a)



$|H(j\omega_0)| = 0{,}532$

$\phi(\omega_0) = 57{,}9^\circ$

$\Longrightarrow \quad t_0 = 1{,}61\mu s$



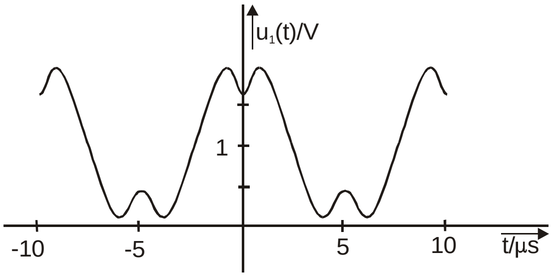
$|H(j3\omega_0)| = 0{,}883$

$\phi(3\omega_0) = 28{,}0^\circ$

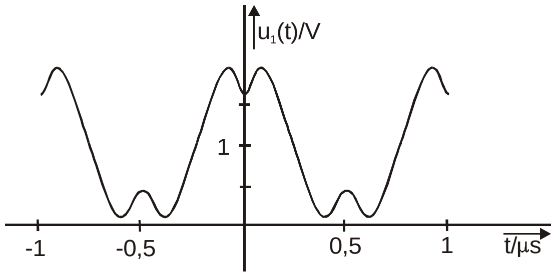
$\Longrightarrow \quad t_1 = 0{,}259\mu s$

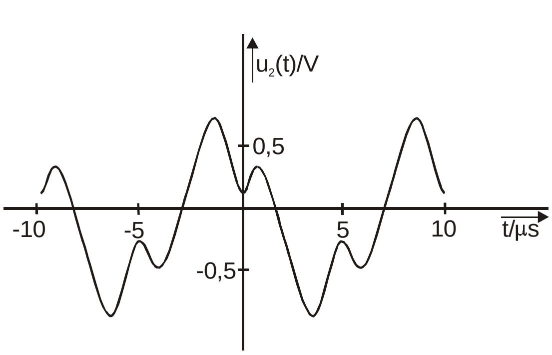
c)

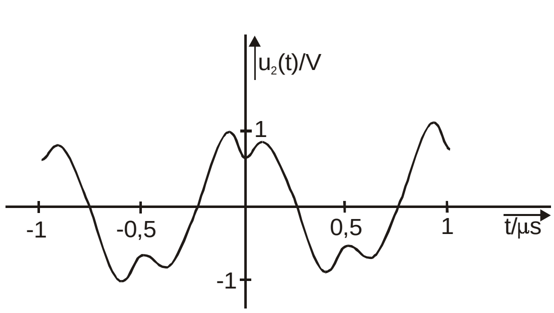
f_0=100kHz



f_0=1MHz

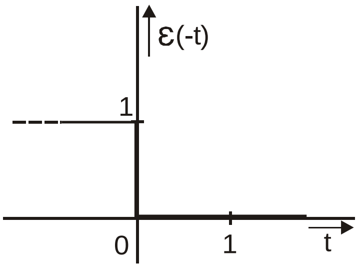


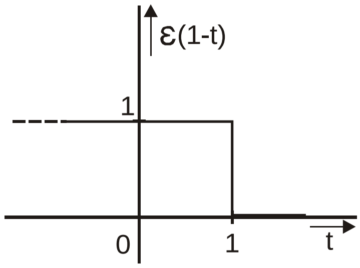


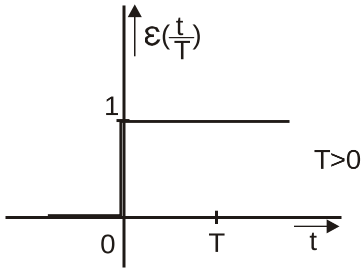


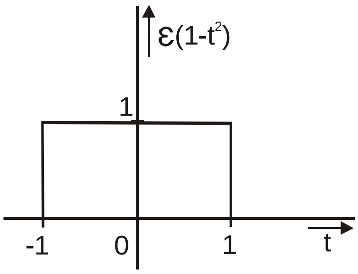
Aufgabe 2.1

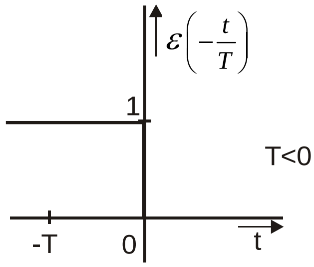
a) $\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \textit{für } t \geq 0 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$

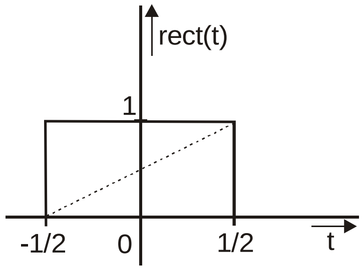




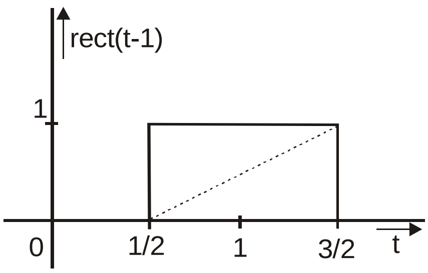


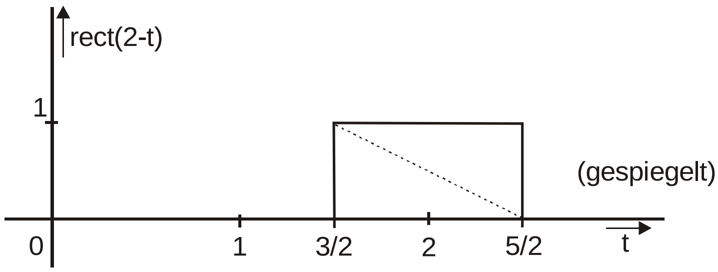


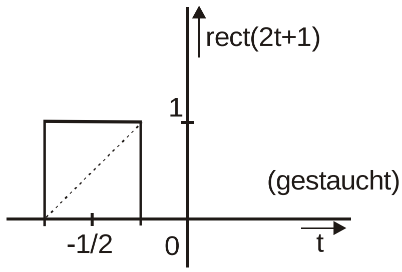




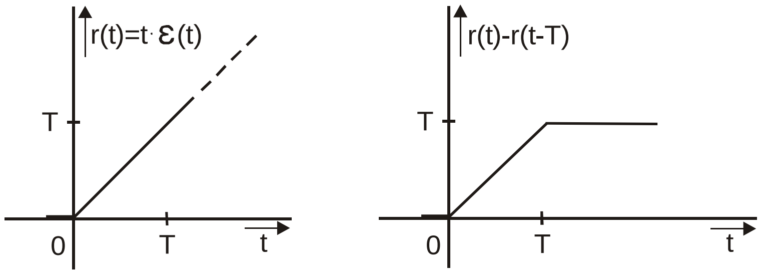
b) $\text{rect}(t) = \begin{cases} 0 & \textit{für } |t| > 1/2 \\ 1 & \textit{für } |t| \leq 1/2 \end{cases}$



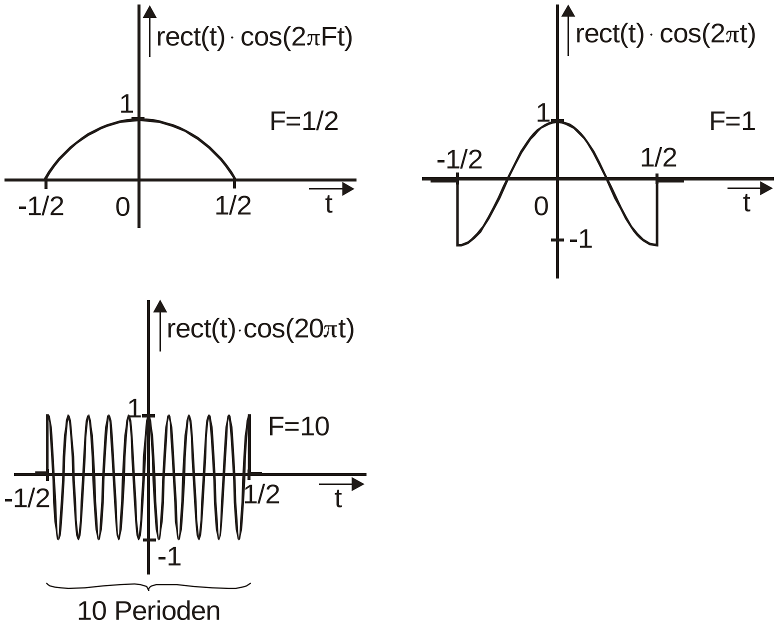




c)

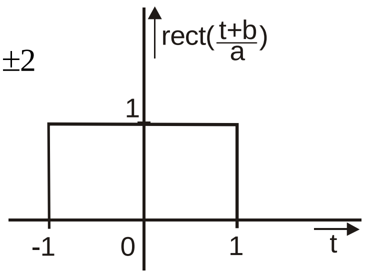


d)

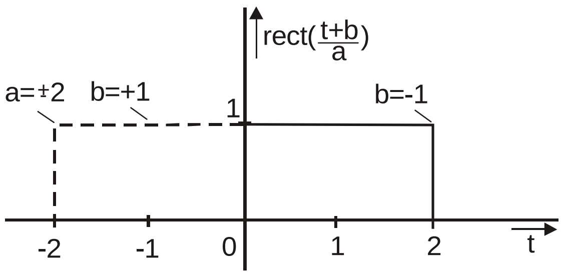


e) $\quad \mathrm{rect}\left(\dfrac{t+b}{a}\right) \qquad$ für $a = \pm 2 \quad , \quad b = \pm 1$ und $b = 0$

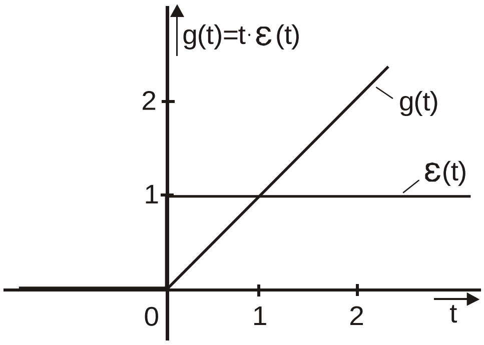
$b = 0, a = \pm 2$



$a = 2$ Dehnung
$a = -2$ Dehnung und Spiegelung



f)



Aufgabe 2.2

Lineares System: $Tr\left\{\sum_i a_i s_i(t)\right\} \overset{!}{=} \sum_i a_i Tr\left\{s_i(t)\right\} = \sum_i a_i g_i(t)$

Zeitinvariant: $Tr\left\{s(t-t_0)\right\} = g(t-t_0)$

a) $g(t) = \frac{d}{dt} s(t)$

$Tr\left\{\sum_i a_i\ s_i(t)\right\} = \frac{d}{dt}\sum_i a_i s_i(t) = \sum_i a_i \frac{d}{dt} s_i(t) = \sum_i a_i g_i(t)$ $\Rightarrow$ linear

$Tr\left\{s(t-t_0)\right\} = \frac{d}{dt} s(t-t_0) = s'(t-t_0) = g(t-t_0)$ $\Rightarrow$ zeitinvariant

b) $g(t) = s(-t)$

$Tr\left\{\sum_i a_i s_i(t)\right\} = \sum_i a_i s_i(-t) = \sum_i a_i g_i(t)$ $\Rightarrow$ linear

$Tr\left\{s(t-t_0)\right\} = s(-t-t_0) \neq g(t-t_0) = s(-t+t_0)$ $\Rightarrow$ <u>nicht</u> zeitinvariant

c) $g(t) = 1 + s(t)$

$Tr\left\{\sum_i a_i s_i(t)\right\} = 1 + \sum_i a_i s_i(t) \neq \sum_i a_i g_i(t)$ $\Rightarrow$ <u>nicht</u> linear

$Tr\left\{s(t-t_0)\right\} = 1 + s(t-t_0) = g(t-t_0)$ $\Rightarrow$ zeitinvariant

d) $g(t) = s(t)\cdot m(t)$ (z.B. Modulator)

$Tr\left\{\sum_i a_i s_i(t)\right\} = m(t)\cdot\sum_i a_i s_i(t) = \sum_i a_i s_i(t) m(t) = \sum_i a_i g_i(t)$ $\Rightarrow$ linear

$Tr\left\{s(t-t_0)\right\} = s(t-t_0)\cdot m(t) \neq g(t-t_0) = s(t-t_0)\cdot m(t-t_0)$ $\Rightarrow$ <u>nicht</u> zeitinvariant

e) $g(t) = s^2(t)$

<u>nicht</u> linear ; aber zeitinvariant

f) $s\left(\frac{t}{3}\right) = g(t)$ „Dehnung“

$$Tr\left\{\sum_i a_1 s_i(t)\right\} = \sum_i a_i s_i\left(\frac{t}{3}\right) = \sum_i a_i g_i(t) \quad \Rightarrow \text{ linear}$$

$$Tr\left\{s(t-t_0)\right\} = s\left(\frac{t}{3} - t_0\right) \neq g(t-t_0) = s\left(\frac{t}{3} - \frac{t_0}{3}\right) \quad \Rightarrow \text{ \underline{nicht} zeitinvariant}$$

g) $g(t) = s(t-2) + s(t+2)$ $\Rightarrow$ linear und zeitinvariant

h) $g(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} s(\tau)\, d\tau$

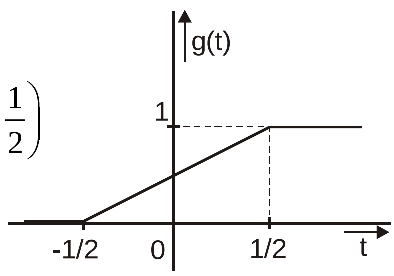
$$Tr\left\{\sum_i a_i s_i(t)\right\} = \int\limits_{-\infty}^{t} \sum_i a_i s_i(\tau)\, d\tau = \sum_i a_i \int\limits_{-\infty}^{t} s_i(\tau)\, d\tau = \sum_i a_i g_i(t) \quad \Rightarrow \text{ linear}$$

$$Tr\left\{s(t-t_0)\right\} = \int\limits_{-\infty}^{t} s(\tau - t_0)\, d\tau = g(t-t_0) \quad \Rightarrow \text{ zeitinvariant}$$

<u>Aufgabe 2.3</u>

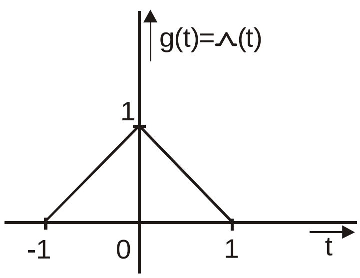
a) $g(t) = \varepsilon(t) * \mathrm{rect}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau) \cdot \mathrm{rect}(t-\tau)\, d\tau$

$$= \left\{\begin{matrix} 0 & t < -1/2 \\ t + 1/2 & -1/2 \le t \le 1/2 \\ 1 & t > 1/2 \end{matrix}\right\} = \left(t + \frac{1}{2}\right)\mathrm{rect}(t) + \varepsilon\left(t - \frac{1}{2}\right)$$



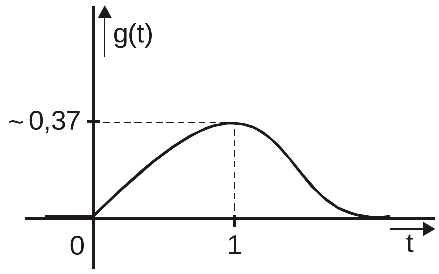
b) $g(t) = \mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{\textit{für} } |t| \le 1 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$

$g(t) = \Lambda(t)$



c) $$g(t) = \left[\varepsilon(t)\cdot e^{-t}\right] * \left[\varepsilon(t)\cdot e^{-t}\right]$$

$$g(t) = t\cdot e^{-t}\cdot\varepsilon(t)$$



Aufgabe 2.4

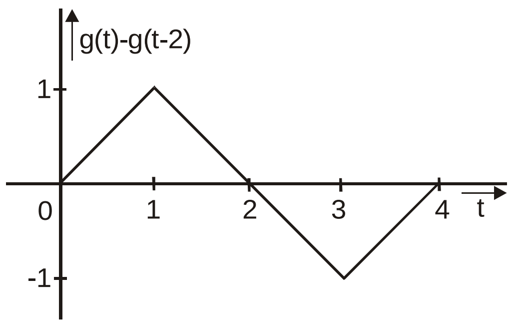
$$\varepsilon(t) * \left[e^{t}\cdot\varepsilon(t)\right] = \varepsilon(t)\cdot\left[e^{t}-1\right]$$

$$\left[\varepsilon(t) * e^{t}\right]\cdot\varepsilon(t) = \varepsilon(t)\cdot e^{t}$$

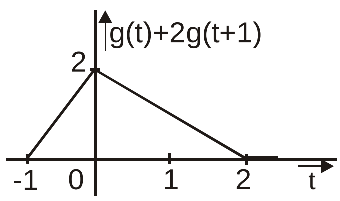
$\Rightarrow$ Multiplikation und Faltung <u>nicht</u> vertauschbar.

Aufgabe 2.5

$$s(t)-s(t-2) \quad\Rightarrow\quad g(t)-g(t-2)$$

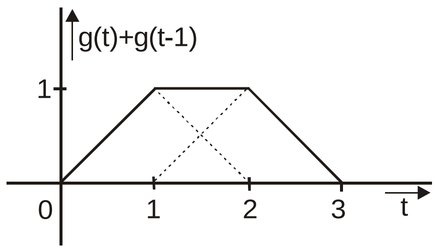


$$s(t)+2s(t+1) \quad\Rightarrow\quad g(t)+2g(t+1)$$



$$s\left(\frac{t}{2}\right) = s(t)+s(t-1) \Rightarrow g(t)+g(t-1)$$

Nur hier



Aufgabe 2.6

$$\left[\frac{d}{dt}s(t)\right]*h(t)=\left[\delta'(t)*s(t)\right]*h(t)=s(t)*\delta'(t)*h(t)=s(t)*h'(t)$$

mit Assoziativgesetz und Kommutativgesetz der Faltungsalgebra.

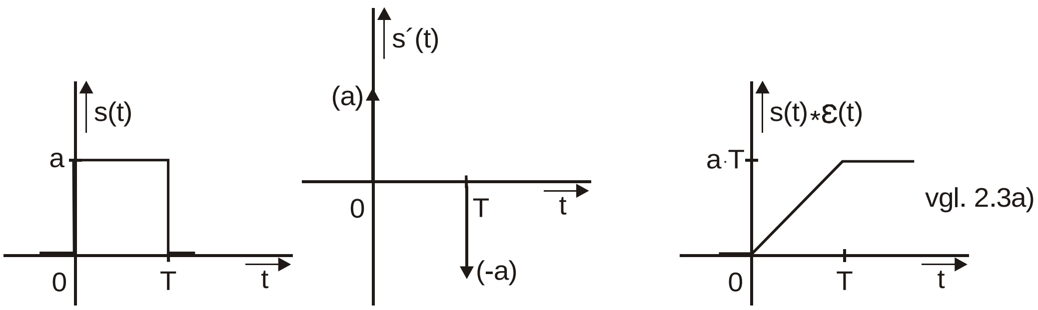
Aufgabe 2.7

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}s(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau\right]dt=\int_{-\infty}^{\infty}s(\tau)\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty}g(t-\tau)\,dt\right]}_{A_g}d\tau$$

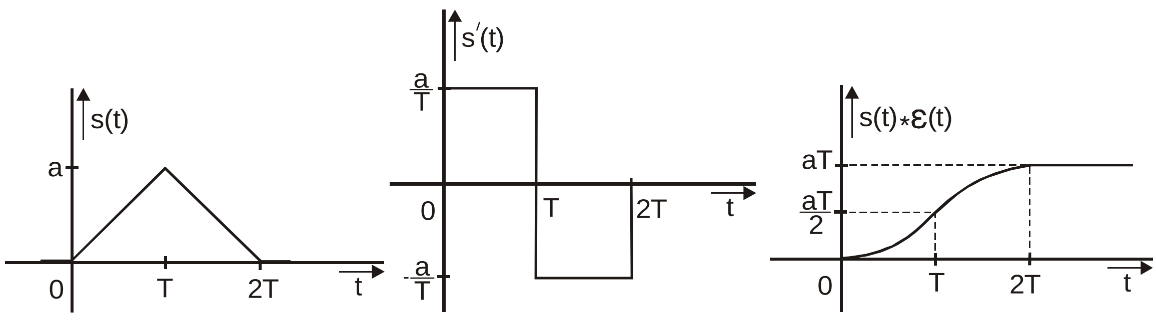
$$A=A_g\int_{-\infty}^{\infty}s(\tau)\,d\tau=A_g\cdot A_s$$

Aufgabe 2.8

a)



b)



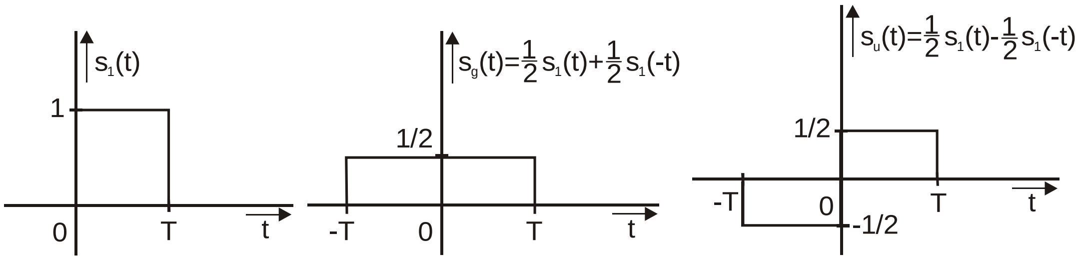
Aufgabe 2.9

a) $h(t) = 0$ für $t < 0 \;\Rightarrow$ kausal

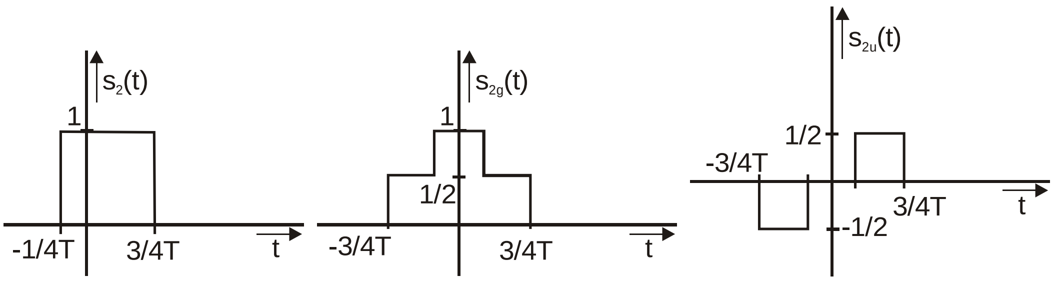
b) $\int\limits_0^{\infty} \left|h(\tau)\right| d\tau = 1 \;\Rightarrow$ amplitudenstabil $\quad da < \infty$!

Aufgabe 2.10

a)



b)



c) $s(t) = s_g(t) + s_u(t)$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s_g^2(t)\,dt + 2\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_u(t)\cdot s_g(t)\,dt}_{=0} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} s_u^2(t)\,dt$$

(Integral über ungerade Funktion)

Aufgabe 3.1

$$f(t) = reell \quad ; \quad \text{Periode } T \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ Grundfrequenz}$$

$$f(t) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(k\omega_0 t) - b_k \sin(k\omega_0 t)\right]$$

wobei $a_k = Re\{c_k\}$ und $b_k = \mathrm{Im}\{c_k\}$ $c_k = a_k + jb_k$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_0^{T_b/2} e^{-jk\omega_0 t}\, dt + \frac{1}{T}\int_{T-\frac{T_b}{2}}^{T} e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$\Rightarrow \qquad c_k = \frac{T_b}{T}\frac{\sin\left(k\omega_0 \frac{T_b}{2}\right)}{k\omega_0 \frac{T_b}{2}} = \frac{T_b}{T}\; si\left(k\pi \frac{T_b}{T}\right)$$

$c_0 = \frac{T_b}{T}$ „Gleichanteil“ $a_k = c_k$ $b_k = 0$

<u>Symmetrie:</u> $f(t) = f(-t)$ <u>gerade</u> reelle Funktion $\Rightarrow b_k = 0$

Aufgabe 3.2

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{t}{T/2} e^{-jk\omega_0 t}\, dt = j\,\frac{\cos(k\cdot\pi)}{k\cdot\pi} = j\,\frac{(-1)^k}{k\cdot\pi} = j\,b_k$$

<u>ungerade reelle Funktion:</u> $f(t) = -f(-t) \quad \Rightarrow a_k = 0$

Aufgabe 3.3

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} \frac{t}{T/2}\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt + \frac{1}{T}\int_0^{T/2}\left(1 - \frac{t}{T/2}\right) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$c_k = \frac{1-\cos(k\pi)}{k^2\pi^2} + j\,\frac{1-\cos(k\cdot\pi)}{k\cdot 2\pi} = a_k + j\,b_k$$

$c_k = 0$ für $k = 2n$ $\Rightarrow$ alle geradzahligen Koeffizienten verschwinden!

$c_0 = 0$

<u>vollständig symmetrische Funktion:</u> $f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(t)$

alle geraden Sinus- (b_{2k}) und Cosinuskoeffizienten (a_{2k}) der Fourier – Reihe verschwinden.

Aufgabe 3.4

a) $c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\,dt = \frac{1}{2}$

b) $s(t) = s(-t)$ gerade Funktion $\Rightarrow$ $b_k = 0$ d.h. $c_k = a_k$

$f(t) = s(t) - c_0 = -f(t + T/2)$ vollständige Symmetrie

$\Rightarrow a_{2k} = b_{2k} = 0 = c_{2k}$

alle geraden Sinus- und Cosinuskoeffizienten verschwinden.

c) $c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} \frac{t + T/2}{T/2}\, e^{-jk\omega_0 t} dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} \frac{-t + T/2}{T/2}\, e^{-jk\omega_0 t} dt$

$c_k = \frac{1-\cos(k\cdot\pi)}{k^2\pi^2} = a_k$ $k =$ ungerade!

d.h. nur ungeradezahlige Vielfache der Grundfrequenz ω_0 treten auf.

Aufgabe 3.5

a) $c_k = \underbrace{\mathrm{Re}\{c_k\}}_{a_k} + j\,\underbrace{\mathrm{Im}\{c_k\}}_{b_k} = a_k + jb_k$

b) $a_k = \frac{1}{2}\left[c_k + c_k^*\right]$ $b_k = \frac{1}{2j}\left[c_k - c_k^*\right]$

Aufgabe 3.6

a) $c_k = j\,\frac{\cos(k\cdot\pi)}{k\cdot\pi} = j\,b_k$ (vgl. Aufg. 3.2)

$c_0 = 0$ $a_k = 0$

$\varphi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) = \begin{cases} -\pi/2 & \textit{für k ungerade} \\ +\pi/2 & \textit{für k gerade} \end{cases}$

b) $f_1(t) = f(t - T/2) = -f_1(-t) \Rightarrow$ ungerade Funktion $\Rightarrow a_k = 0$

Zeitverschiebung:

$$f_1(t) = f\left(t - \frac{T}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0\left(t - T/2\right)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_k e^{-jk\omega_0 T/2}}_{=c_{1k}} e^{jk\omega_0 t}$$

$\Rightarrow$ $c_{1k} = (-1)^k c_k$ $\Rightarrow |c_{1k}| = |c_k|$

$$\Rightarrow \quad c_{1k} = \frac{j}{k \cdot \pi} = j\, b_{1k} \qquad\qquad a_{1k} = 0$$

$$\varphi_{1k} = \arctan\left(\frac{b_{1k}}{a_{1k}}\right) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{für alle } k$$

c) $$f_2(t) = f\left(t - T/4\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 (t - T/4)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_k e^{-jk\omega_0 T/4}}_{=c_{2k}} e^{jk\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow \quad c_{2k} = c_k e^{-jk\pi/2} = \underbrace{c_k}_{=jb_k} \cdot \left[\cos\left(k\, \pi/2\right) - j \sin\left(k\, \pi/2\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad c_{2k} = \underbrace{b_k \sin\left(k\, \pi/2\right)}_{=a_{2k}} + j \underbrace{b_k \cos\left(k\, \pi/2\right)}_{=b_{2k}}$$

$$\varphi_{2k} = \arctan\left(\frac{b_{2k}}{a_{2k}}\right) \quad \Rightarrow$$

k	1	2	3	4	....
φ_{2k}	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	Periode

Aufgabe 3.7

a) $$s(t) = \left(\frac{t}{T/2}\right)^2 \quad \text{für} \quad -T/2 \le t \le T/2$$

b) $$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)\, dt = \frac{1}{3}$$

c) $$s(t) = \frac{1}{\pi^2} f\left(t \cdot \frac{2\pi}{T}\right) \qquad \text{mit} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\cos(\omega_0 t)}{1^2} - \frac{\cos(2\omega_0 t)}{2^2} + \frac{\cos(3\omega_0 t)}{3^2} - \dots\dots\dots\right)$$

d) $$a_k = \frac{2}{\pi^2} \frac{(-1)^k}{k^2} \qquad\qquad b_k = 0$$

e) $c_k = a_k$ reell!

f) $$P_s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = c_0^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = c_0^2 + 2\frac{4}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad S_{eff} = \sqrt{P_s} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

oder $$S_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)\,dt} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Aufgabe 3.8

nach Aufgabe 1.1 $$H(j\omega) = \frac{j\omega T}{1+j\omega T} \qquad T = \frac{L}{R} \quad = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$g(t) = f(t) * h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_k H(jk\omega_0)}_{d_k} e^{jk\omega_0 t}$$ s. (3.39)

$$\Rightarrow \quad d_k = \frac{T_b}{T} si\left(k\omega_0 \frac{T_b}{2}\right)\cdot\frac{jk\omega_0 T}{1+jk\omega_0 T} = a_k + jb_k \quad ; \quad d_0 = 0$$

$$a_k = c_k \frac{4k^2\pi^2}{1+k^2 4\pi^2} \qquad b_k = c_k \frac{k\cdot 2\pi}{1+k^2 4\pi^2}$$

$$g(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(k\omega_0 t) - b_k \sin(k\omega_0 t)\right]$$

oder $$g(t) = \underbrace{d_0}_{=0} + 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\left|H(jk\omega_0)\right| \cos\left(k\omega_0 t + \varphi_d(k)\right)$$ (s.(3.18)

$$\varphi_d(k) = \arctan\left(\frac{1}{k\cdot 2\pi}\right) + \begin{cases} \pm\pi & \mathrm{Re}\{c_k\} < 0) \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Aufgabe 3.9

a) $$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-1}^{0} (t+1)\, e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{1} (1-t)\, e^{-j\omega t} dt$$

$$S(j\omega) = \frac{2}{\omega^2}\left(1-\cos(\omega)\right) = 4\frac{\sin^2\left(\omega/2\right)}{\omega^2} = \frac{\sin^2\left(\omega/2\right)}{\left(\omega/2\right)^2} = si^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

b) $$s_p(t) = s(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$ mit $T = 2$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_p(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-jk\omega_0 t} = \frac{1}{T} S(jk\omega_0)$$

$$\Rightarrow \quad c_k = \frac{1}{T}\frac{2}{(k\omega_0)^2}\left(1-\cos(k\omega_0)\right) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Aufgabe 3.10

$$G(j\omega) = \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}} = si\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad \mathrm{rect}(t)$$

Aufgabe 3.11

a) $$G(j\omega) = j\left[\frac{2\cos(\omega)}{\omega} - \frac{2\sin(\omega)}{\omega^2}\right]$$

b) $$f_g(t) = \frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \quad = \frac{1}{2}\left[f(t) + f(-t)\right]$$

$$f_u(t) = \frac{1}{2}t \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \quad = \frac{1}{2}\left[f(t) - f(-t)\right]$$

$$f_g(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad F_g(j\omega) = si(\omega)$$

$$f_u(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad F_u(j\omega) = \frac{1}{2}G(j\omega)$$

$$F(j\omega) = F_g(j\omega) + F_u(j\omega)$$

c) $f_g(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad \mathrm{Re}\{F(j\omega)\}$ $\rightarrow$ gerade Funktion

$f_u(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad j\,\mathrm{Im}\{F(j\omega)\}$ $\rightarrow$ ungerade imaginäre Funktion

Aufgabe 3.12

a) $$F(j\omega) = \pi \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad f(t) = \frac{\sin(t)}{t} = si(t)$$

b) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = F(j0) = \pi$$

c) $$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = si(t) * si(t)\Big|_{t=0} = \pi \cdot si(t)\Big|_{t=0} = \pi$$

Aufgabe 3.13

a) $$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} \qquad T = R \cdot C$$

b) $$h(t) = \frac{1}{T}\varepsilon(t) \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

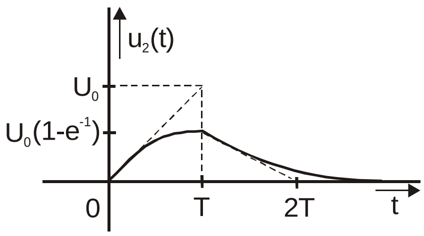
c) $$h_\varepsilon(t) = \varepsilon(t) * h(t) = U_0 \varepsilon(t) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

d) $$u_1(t) = U_0 \varepsilon(t) - U_0 \varepsilon(t-T)$$

$$u_2(t) = u_1(t) * h(t) = U_0 \left[h_\varepsilon(t) - h_\varepsilon(t-T)\right]$$

$$= U_0 \left[\varepsilon(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) - \varepsilon(t-T)\left(1 - e^{-\frac{t-T}{T}}\right)\right]$$

e)



Aufgabe 3.14

a) i) $$\int_T \sin(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{2}\int_T \left[\cos((m-n)\omega_0 t) - \cos((m+n)\omega_0 t)\right]dt$$

mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ $\Rightarrow$ $$= \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \quad (\text{und } m = n = 0) \\ \frac{T}{2} & \text{für } m = n \quad \neq 0 \end{cases}$$

ii) $$\int_T e^{jm\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \int_T e^{j(m-n)\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{j(m-n)\omega_0}\left[e^{j(m-n)\pi} - e^{-j(m-n)\pi}\right]$$

$$= T \cdot \frac{\sin((m-n)\pi)}{(m-n)\pi} = T\ si((m-n)\pi) = \begin{cases} T & \text{für } m = n \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases}$$

b) i) $\phi_k = \sin(k\omega_0 t)$ mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$\int_T \phi_m(t)\phi_n(t)\,dt = \left.\begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ \frac{T}{2} & \text{für } n = m \end{cases}\right\} \to \textit{orthogonal, aber } \underline{\textit{nicht}} \textit{ orthonormal}$$

$\phi_k = e^{jk\omega_0 t}$ $\to$ orthogonal, aber nicht orthonormal

ii) $\int\limits_T s^2(t)\,dt = \int\limits_T \sum_i c_i \phi_i(t) \sum_k c_k^* \phi_k^*(t)\,dt$

$= \sum_i \sum_k c_i c_k^* \int\limits_T \phi_i(t)\phi_k^*(t)\,dt = \sum_i |c_i|^2$ (für $i = k$, sonst Null)

<u>Aufgabe 4.1</u>

a) $$g(t) = \frac{1}{\omega_1 T}\left[\sin(\omega_1 t)\right] - \sin\left(\omega_1 (t - T)\right)$$

i) $$g(t) = 0$$ ii) $$g(t) = \frac{1}{\omega_1 T} 2\sin(\omega_1 t)$$

b) $$H(j\omega) = si\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{-j\omega T/2}$$

$$S(j\omega) = \pi\,\delta(\omega + \omega_1) + \pi\,\delta(\omega - \omega_1) \qquad (3.94)$$

$$G(j\omega) = S(j\omega)\cdot H(j\omega) = \pi\, si\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right)\left[e^{j\omega_1 T/2}\,\delta(\omega + \omega_1) + e^{-j\omega_1 T/2}\,\delta(\omega - \omega_1)\right]$$

$$\omega_1 = k\cdot\frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = 0$$

$$\omega_1 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{T} \Rightarrow \quad G(j\omega) = j\pi\cdot(-1)^k\, si\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)\cdot\left[\delta(\omega + \omega_1) - \delta(\omega - \omega_1)\right]$$

<u>Aufgabe 4.2</u>

a) Nach Aufgabe 2.2 $$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \left|H(j\omega)\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \qquad \varphi(\omega) = -\arctan(\omega T)$$

b) $$a(\omega) = -10\log_{10}\left|H(j\omega)\right|^2 = 10\log_{10}\left(1 + \omega^2 T^2\right) \quad dB$$

$$t_p(\omega) = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega} = \frac{1}{\omega}\arctan(\omega T)$$ „Phasenlaufzeit“

$$t_g(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = T\cdot\frac{1}{1 + \omega^2 T^2}$$ „Gruppenlaufzeit“

c) $\varphi(\omega) \neq$ konstant $\Rightarrow$ <u>nicht</u> linearphasig

d) - <u>lineare</u> Verzerrungen $\leftrightarrow$ $\left|H(jk\omega_0)\right| \neq$ konstant

- Phasenverzerrungen $\leftrightarrow$ $t_p(\omega) \neq$ konstant

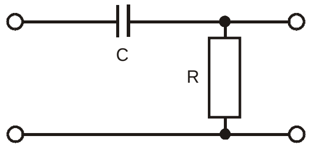
Aufgabe 4.3

a) $RC-$Tiefpass: Impulsantwort $h_{RC}(t)=\frac{1}{T}e^{-t/T}\varepsilon(t)$ (vgl. Abb. 3.7)

hier: $h(t)=\delta(t)-h_{RC}(t)$

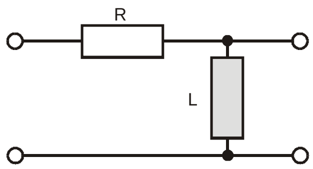
b) $\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad H(j\omega)=1 \quad - \quad \frac{1}{1+j\omega T} \quad = \quad \frac{j\omega T}{1+j\omega T}$

c)



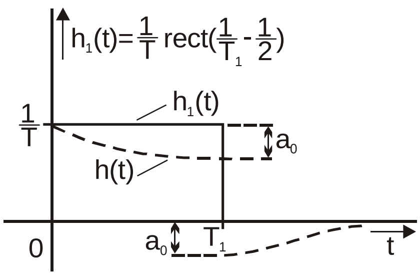
mit $RC=T$ (vgl. Aufgabe 1.3)

d)



mit $\frac{L}{R}=T$ (vgl. Aufgabe 1.1)

Aufgabe 4.4



a) $h(t)=h_{RC}(t)-\left[h_{RC}(t)*h_L(t)\right]=h_{RC}(t)*\left[\delta(t)-\delta(t-t_0)\right]=h_{RC}(t)-h_{RC}(t-t_0)$

$\Rightarrow \quad t_0=T_1 \qquad a_0\overset{!}{=}0{,}01/T \quad \Rightarrow h_{RC}(T_1)=\frac{1}{T}e^{-\frac{T_1}{T}}\overset{!}{\geq}\frac{0{,}99}{T}$

$\Rightarrow \quad \frac{T_1}{T}\leq-\ln(0{,}99)\approx 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad T\geq 99{,}5\,T_1$

b) wie oben mit $T=99{,}5\,T_1$.

Aufgabe 4.5

a) $$h(t) = \left[\delta(t) * h_{RC}(t)\right] * h_{RC}(t) = h_{RC}(t) * h_{RC}(t)$$

$$H(j\omega) = H_{RC}(j\omega) \cdot H_{RC}(j\omega) \quad \Rightarrow \quad H(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\omega T\right)^2} \qquad \text{(mit (3.78))}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\omega T\right)^2}$$

b) $$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{RC}(\tau) h_{RC}(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{T^2} \cdot t \cdot e^{-t/T} \cdot \varepsilon(t) \qquad \text{(vgl. Aufgabe 2.3 c)}$$

c) $$h_\varepsilon(t) = u_2(t) \qquad \text{s.(1.39)}$$

$$\Rightarrow h_{RLC}(t) = \frac{d}{dt} h_\varepsilon(t) = \frac{d\, u_2(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\, dt\right] = \frac{1}{C} i(t) \qquad (1.36)$$

$$\Rightarrow h_{RLC}(t) = \frac{1}{LC} t \cdot e^{-at} \varepsilon(t) \overset{!}{=} h(t) \qquad \text{mit } a = \frac{R}{2L}$$

Vergleich mit $h(t) \quad \Rightarrow \quad T^2 = LC \qquad$ und $\dfrac{R}{2L} = a = \dfrac{1}{T}$

Damit: $\dfrac{1}{LC} = \dfrac{R^2}{4L^2} \qquad$ für $b = 0$

$\Rightarrow$ Induktivitäten können in geeigneten Schaltungen durch Kondensatoren ersetzt werden.

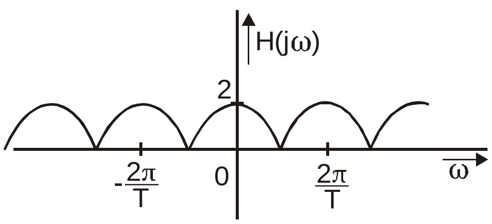
Aufgabe 4.6

a) $$h(t) = \delta(t) + \delta(t - T)$$

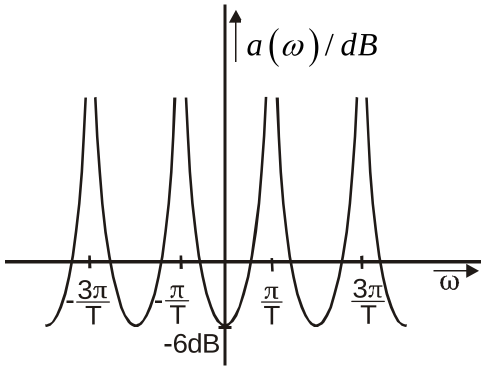
$$H(j\omega) = 1 + e^{-j\omega T} = 1 + \cos(\omega T) - j\sin(\omega T) = e^{-j\omega T/2}\left[e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}\right] = 2\cos\left(\omega \frac{T}{2}\right) e^{-j\omega T/2}$$

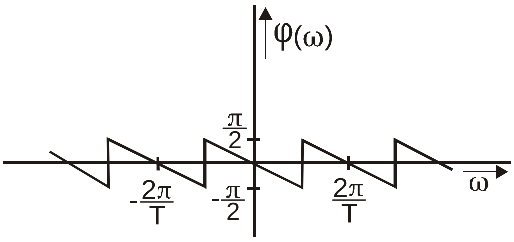
$$\left|H(j\omega)\right| = 2\left|\cos\left(\omega\frac{T}{2}\right)\right| \qquad \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\sin(\omega T)}{1 + \cos(\omega T)}\right) = -\frac{\omega T}{2}, \text{ da } \operatorname{Re}\{H(j\omega)\} \geq 0$$

(Hauptwert von $\arctan(\cdot)$ zwischen $-\dfrac{\pi}{2}$ und $\dfrac{\pi}{2}$)



b) $$a(\omega) = -20\lg\left|H(j\omega)\right| = -6\,dB - 20\lg\left|\cos\left(\omega\frac{T}{2}\right)\right|$$





Phasensprünge um $\pm k\cdot 2\pi$ an jeder Stelle zulässig, da $e^{-j\varphi(\omega)\pm k\cdot 2\pi} = e^{-j\varphi(\omega)}$

Aufgabe 4.7

a) aus Vorlesung (1.38) Sprungantwort: $u_2(t) = 1 - e^{at}\left[\cos(\beta t) + \frac{a}{\beta}\sin(\beta t)\right]$

für $t > 0$

Impulsantwort: $$h(t) = \frac{d}{dt}u_2(t) = \frac{1}{C}\cdot i(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{\beta LC}e^{-at}\sin(\beta t)\cdot\varepsilon(t)$$ (vgl. (1.35)

$$H(j\omega) = \frac{1}{1-\omega^2 LC + j\omega RC}$$ (vgl. Aufgabe 4.5 c)

b) $R = 0 \quad\Rightarrow\quad H(j\omega) = \frac{1}{1-\omega^2 LC}$ $\Rightarrow$ Polstelle: $\omega_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{LC}}$

Aufgabe 5.1

a) $f(t) = \sin(t) \cdot \varepsilon(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$, $\operatorname{Re}\{s\} > 0$

rechtsseitig, kausal

b) $f(t) = \sin(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(t) e^{-st} dt \Rightarrow$ konvergiert nicht!

c) $f(t) = e^{2t} \cdot \varepsilon(t-T) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} F(s) = \dfrac{e^{(2-s)T}}{s-2}$, $\operatorname{Re}\{s\} > 2$

d) $f(t) = t \cdot e^{2t} \cdot \varepsilon(t)$ (kausal) $\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} F(s) = \dfrac{1}{(2-s)^2}$, $\operatorname{Re}\{s\} > 2$

e) $f(t) = \sinh(2t) \cdot \varepsilon(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} F(s) = \dfrac{2}{4-s^2}$, $\operatorname{Re}\{s\} < -2$

Aufgabe 5.2

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

Konvergenzbereich:

Schnittmenge der Konvergenzbereiche von $F_1(s)$ und $F_2(s)$. Es kann aber auch durch die Addition zur Auslöschung von Singularitäten kommen, so dass im allgemeinen der gesamte Konvergenzbereich eine Obermenge der Schnittmenge der einzelnen Konvergenzbereiche ist.

Aufgabe 5.3

a) $F(s) = \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{s+2}$ $s_{p1} = -1, s_{p2} = -2$

rechtsseitiges Signal $\Rightarrow$ Konvergenzbereich $\operatorname{Re}\{s\} > -1$

b) $G(s) = \dfrac{4}{s+3} - \dfrac{1}{s+1}$ $s_{p1} = -3,\quad s_{p2} = -1$

rechtsseitiges Signal $\Rightarrow$ Konvergenzbereich $\operatorname{Re}\{s\} > -1$

c) $F(s) + G(s) = \dfrac{1}{s+2} + \dfrac{4}{2+3}$ $s_{p1} = -2,\quad s_{p2} = -3$

rechtsseitiges Signal $\Rightarrow$ Konvergenzbereich $\operatorname{Re}\{s\} > -2$

Anmerkung: Die Polstellen bei -1 heben sich gegenseitig auf.

$\Rightarrow$ erweiterter Konvergenzbereich (s. Aufg. 5.2)

Aufgabe 5.4

$$f(t-t_0) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} F(s)\,e^{-st_0}$$

Konvergenzbereich ändert sich nicht

$$f(t)e^{s_0 t} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} F(s-s_0)$$

Der Konvergenzbereich verschiebt sich um $\operatorname{Re}\{s_0\}$ nach rechts.

Aufgabe 5.5

$$f\left(\frac{t}{T}\right) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} |T| \quad F(sT)$$

Der Konvergenzbereich wird in gleicher Weise skaliert.

Aufgabe 5.6

Die Beispiele a) bis h) $\rightarrow$ Lage der Pole und Nullstellen identisch

a) $H(s)=\dfrac{s-2}{s(s+3)(s+2)}$, $\operatorname{Re}\{s\}>0$

$\Rightarrow$ rechtsseitige kausale Funktion

$$H(s)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s}+2\,\frac{1}{s+2}-\frac{5}{3}\,\frac{1}{s+3} \quad \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \quad h(t)=\varepsilon(t)\left[-\frac{1}{3}+2e^{-2t}-\frac{5}{3}e^{-3t}\right]$$

b) Konvergenzgebiet: $\operatorname{Re}\{s\}<-3 \Rightarrow$ linksseitige Funktion

$$\Rightarrow \quad h(t)=\varepsilon(-t)\left[\frac{1}{3}-2e^{-2t}+\frac{5}{3}e^{-3t}\right]$$

$H(j\omega)$ existiert nicht, da $j\omega-$Achse nicht im Konvergenzbereich

c) Konvergenzbereich: $-3<\operatorname{Re}\{s\}<-2$

$\Rightarrow$ zweiseitige Funktion

$$H(s)=\underbrace{-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s}+\frac{2}{s+2}}_{H_1(s)}\ \underbrace{-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{s+3}}_{H_2(s)}=H_1(s)+H_2(s)$$

Konvergenzbereiche: $H_1(s)$, $\operatorname{Re}\{s\}<-2 \Rightarrow$ linksseitige Funktion

$\updownarrow \mathcal{L}^{-1}$ $\qquad H_2(s)$, $\mathrm{Re}\{s\} > -3 \;\Rightarrow\;$ rechtsseitige Funktion

$$\Rightarrow \quad h(t) = \varepsilon(-t)\left[\frac{1}{3} - 2e^{-2t}\right] - \varepsilon(t)\frac{5}{3}e^{-3t}$$

d) Konvergenzbereich: $-2 < \mathrm{Re}\{s\} < 0$

$\Rightarrow$ zweiseitige Funktion

$$H(s) = \underbrace{-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s}}_{H_1(s)} + \underbrace{\frac{2}{s+2} - \frac{5/3}{s+3}}_{H_2(s)}$$

Konvergenzbereiche: $H_1(s)$, $\mathrm{Re}\{s\} < 0 \;\Rightarrow\;$ linksseitige Funktion

$H_2(s)$, $\mathrm{Re}\{s\} > -2 \;\Rightarrow\;$ rechtsseitige Funktion

$$\Rightarrow \quad h(t) = \varepsilon(-t)\cdot\frac{1}{3} + \varepsilon(t)\left[2e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-3t}\right]$$

e) nicht definiert!

Das Konvergenzgebiet wird nie durch Nullstellen begrenzt, immer nur durch Polstellen oder $\pm\infty$.

f) nicht definiert!

<u>Im</u> Konvergenzgebiet liegen keine Pole!

g) nicht definiert!

Das Konvergenzgebiet ist immer ein einfach <u>zusammenhängendes</u> Gebiet ohne Löcher.

h) wie f)

i) Nullstelle: $S_{N1} = 2$

Polstellen: $S_{p1} = -1$, $S_{p2,3} = \pm\, j\,2$ (konjugiert komplex!)

$$H(s) = \frac{s-2}{(s-j2)\,(s+j2)\,(s+1)}$$ mit Partialbruchzerlegung

$$\Rightarrow \quad H(s) = \underbrace{\frac{1}{5}\cdot\frac{3s+2}{s^2+4}}_{H_1(s)} - \underbrace{\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{s+1}}_{H_2(s)}$$

Konvergenzbereiche: $H_1(s)$, $\mathrm{Re}\{s\} < 0 \;\Rightarrow\;$ linksseitige Funktion

$H_2(s)$, $\mathrm{Re}\{s\} > -1 \;\Rightarrow\;$ rechtsseitige Funktion

$$h(t) = \frac{1}{5}\left[-\varepsilon(-t)\left[3\cos(2t) + \sin(2t)\right] - \varepsilon(t)\cdot 3e^{-t}\right]$$

j) Nullstelle: $S_{N1} = 0$

Polstellen: $S_{p1} = 1 \quad , \quad S_{p2,3} = -2 \pm j$ (konjugiert komplex!)

$$H(s) = \frac{s}{(s-1)\big(s+(2-j)\big)\big(s+(2+j)\big)} = \frac{s}{(s-1)\Big((s+2)^2+1\Big)}$$

Konvergenzbereich: $\operatorname{Re}\{s\} > 1 \;\Rightarrow$ rechtsseitiges Signal

$$h(t) = \frac{1}{10}\Big[-e^{-2t}\left[\cos(t) - 7\sin(t)\right]\varepsilon(t) + e^{-t}\cdot\varepsilon(t)\Big]$$

k) nicht definiert!

Bei reellen Funktionen treten Pole und Nullstellen entweder paarweise konjugiert komplex auf oder sind reell.

l) Konvergenzgebiete werden nie durch Nullstellen begrenzt.

$\rightarrow$ nicht definiert!

m) Nullstelle: $S_{N1} = 2 \quad , \quad S_{N2,3} = -2(1 \pm j)$ (konjugiert komplex!)

Polstellen: $S_{p1,2,3} = 0$ (3-fach!)

$$H(s) = \frac{\left[(s+2)^2+4\right]\cdot(s-2)}{s^3} = \frac{s^3+2s^2-16}{s^3}$$

$$\Rightarrow \quad H(s) = 1 + \frac{2}{s} - \frac{16}{s^3} \quad , \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0 \quad , \text{ rechtsseitige Funktion}$$

$$h(t) = \delta(t) + 2\,\varepsilon(t) - 8t^2\,\varepsilon(t)$$

n) nicht definiert $\rightarrow$ siehe g)

o) Nullstellen: $S_{N1,2} = 0$ (2-fach)

Polstellen: $S_{p1,2} = 2 \pm j2 \quad , \quad S_{p3,4} = -2 \pm j$

$$H(s) = \frac{s^2}{\left[(s-2)^2+4\right]\left[(s+2)^2+1\right]} \quad , \quad -2 < \operatorname{Re}\{s\} < 2 \;\Rightarrow \text{ zweiseitige Funktion}$$

$$H(s) = \frac{1}{425}\left[\underbrace{52\cdot\frac{s-2}{(s-2)^2+4} + 64\cdot\frac{2}{(s-2)^2+4}}_{H_1(s)} \underbrace{- 52\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+1} + 89\cdot\frac{1}{(s+2)^2+1}}_{H_2(s)}\right]$$

Konvergenzbereiche: $H_1(s)$, $\operatorname{Re}\{s\} < 2 \;\Rightarrow$ linksseitige Funktion

$$H_2(s)\,,\ \mathrm{Re}\{s\} > -2 \quad \Rightarrow \text{ rechtsseitige Funktion}$$

$$h(t) = \frac{1}{425}\Big[-\varepsilon(-t)e^{2t}\big[52\cos(2t) + 64\sin(2t)\big] + \varepsilon(t)e^{-2t}\big[-52\cos(t) + 89\sin(t)\big]\Big]$$

p) Nicht definiert $\rightarrow$ siehe l) und f)

Aufgabe 5.7

$$F(s) = \frac{2-2s}{(s+1)(s+2)(s+5)} \quad , \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1, \text{ rechtsseitige Funktion}$$

$$\Rightarrow \qquad F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+5}$$

$$f(t) = \varepsilon(t)\left[e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-5t}\right]$$

Aufgabe 5.8

$$F(s) = \frac{2s-1}{(s+1)^3(s+4)} \quad , \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1 \quad \Rightarrow \quad \text{rechtsseitige Funktion}$$

$$F(s) = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{s+4}$$

$$\updownarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$f(t) = \varepsilon(t)\left[-\frac{1}{3}e^{-t} + t\,e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 e^{-t} + \frac{1}{3}\,e^{-4t}\right]$$

Aufgabe 5.9

a) $$H(j\omega) = \frac{j\omega T}{1+j\omega T} \quad \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \quad H(s) = \frac{sT}{1+sT} \qquad \text{mit} \qquad T = \frac{L}{R}$$

b) $$u_1(t) = A\sin(\omega_0 t)\cdot\varepsilon(t) \quad \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \quad U_1(s) = \frac{A\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \quad , \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

c) $$U_2(s) = U_1(s)\cdot H(s) = \frac{A\omega_0 s}{\left(s^2+\omega_0^2\right)\left(s+\frac{1}{T}\right)}$$

d) $$U_2(s) = a_1\,\frac{s}{s^2+\omega_0^2} + a_2\,\frac{1}{s^2+\omega_0^2} + a_3\,\frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

mit $$a_1 = \frac{A\omega_0 T}{1+\omega_0^2 T^2} \quad , \quad a_2 = a_1\cdot\omega_0^2\,T \quad , \quad a_3 = -a_1$$

Konvergenzbereich: $\mathrm{Re}\{s\} > 0 \quad \Rightarrow$ rechtsseitiges Signal

$$u_2(t) = \left[a_1 \cos(\omega_0 t) + \frac{a_2}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + a_3\, e^{-t/T} \right] \varepsilon(t)$$

Aufgabe 5.10

Systeme sind stabil, wenn der Konvergenzbereich die $j\omega-$Achse einschließt.

a) bis d) $j\omega-$Achse nicht im Konvergenzbereich $\Rightarrow$ nicht stabil

e) bis h) nicht definiert sowie k), l) und n)

i) bis m) wie a) bis d)

o) $j\omega-$Achse im Konvergenzbereich $\Rightarrow$ stabil

p) nicht definiert.

Aufgabe 5.11

a) $$\Rightarrow H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{1}{T}s + \omega_0^2}$$

mit $T = \frac{L}{R}$ und $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

Polstellen: $S_{p1,2} = -\underbrace{\frac{1}{2T}}_{a} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{1}{4T^2} - \omega_0^2}}_{b}$

I) $b > 0 \quad \Rightarrow \quad s_{p1,2} = -a \pm b \quad \Rightarrow$ Konvergenzbereich $\mathrm{Re}\{s\} > -a + b$

II) b imaginär $\Rightarrow \quad s_{p1,2} = -a \pm jb \quad \Rightarrow$ Konvergenzbereich $\mathrm{Re}\{s\} > -a$

Stabilität, wenn $j\omega-$Achse im Konvergenzbereich.

$\Rightarrow \quad -a + b \overset{!}{<} 0$ und $a > 0$,

$\Rightarrow \quad T > 0$, $\frac{R}{L} > 0$ und $LC > 0$

$\Rightarrow$ passives $RLC-$System ist immer stabil!

b) $$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{1}{T}s + \omega_0^2} \overset{!}{=} \frac{\omega_g^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_g s + \omega_g^2}$$ (vgl. (5.71)

$\Rightarrow \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \omega_g^2$ und $\frac{1}{T} = \frac{R}{L} = \sqrt{2}\omega_g$

$\Rightarrow$ Polstellen: $S_{p1,2} = -\frac{\omega_g}{\sqrt{2}}[1 \pm j]$ $\Rightarrow$ Pole liegen auf Kreis mit dem Radius $s = \omega_g$

$\Rightarrow$ Konvergenzbereich: $\text{Re}\{s\} > -\frac{\omega_g}{\sqrt{2}}$

Aufgabe 5.12

Operationsverstärker im invertierenden Betrieb $\rightarrow$ Vorlesung Abb. 5.14a

$\Rightarrow$ $H(s) = -\frac{R_2}{R_1}$ (5.64)

a) ersetze $R_1 \rightarrow R$, $R_2 \rightarrow \frac{1}{sC}$ $\Rightarrow$ $H(s) = -\frac{1}{sRC}$, $\text{Re}\{s\} > 0$

b) ersetze $R_1 \rightarrow \frac{1}{sC}$, $R_2 \rightarrow R$ $\Rightarrow H(s) = -sRC$, gesamte s-Ebene

c) ersetze $R_1 \rightarrow R_1$, $R_2 \rightarrow R_2 \| C$ $\Rightarrow H(s) = -\frac{1/R_1}{\frac{1}{R_2} + sC}$, $\text{Re}\{s\} > -\frac{1}{CR_2}$

d) ersetze $R_1 \rightarrow R_1 + \frac{1}{sC}$, $R_2 \rightarrow R_2$ $\Rightarrow H(s) = \frac{-sCR_2}{1 + sCR_1}$, $\text{Re}\{s\} > -\frac{1}{CR_1}$

e) ersetze $R_1 \rightarrow \frac{1}{sC_1}$, $R_2 \rightarrow C_2 \| R$ $\Rightarrow H(s) = \frac{-s\frac{C_1}{C_2}}{\frac{1}{RC_2} + s}$, $\text{Re}\{s\} > -\frac{1}{RC_2}$

f) ersetze $R_1 \rightarrow R + \frac{1}{sC_1}$, $R_2 \rightarrow \frac{1}{sC_2}$ $\Rightarrow H(s) = \frac{-\frac{1}{RC_2}}{s + \frac{1}{RC_1}}$, $\text{Re}\{s\} > -\frac{1}{RC_1}$

Aufgabe 6.1

$$g(t) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = s(t) \cdot m(t)$$

f) $\left[s_1(t) + s_2(t)\right] \cdot m(t) = s_1(t) \cdot m(t) + s_2(t) \cdot m(t) = g_1(t) + g_2(t) \quad \Rightarrow$ lineares System!

g) $s(t - t_0) \cdot m(t) \quad \neq \quad g(t - t_0) = s(t - t_0) \cdot m(t - t_0) \quad \Rightarrow$ nicht zeitinvariant

Aufgabe 6.2

$$s_a(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \qquad \text{mit} \qquad \omega_T = \frac{2\pi}{T}$$

a) $\Rightarrow \quad S_a(j\omega) = \frac{\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\delta\left(\omega - (n\omega_T - \omega_0)\right) + \delta\left(\omega - (n\omega_T + \omega_0)\right)\right]$

b) $\omega_{T1} = \frac{3}{4}\omega_0 \quad \Rightarrow g(t) = \frac{1}{T}\left[\cos\left(\frac{\omega_0}{4}t\right) + \cos\left(\frac{\omega_0}{2}t\right) + \cos(\omega_0 t)\right]$

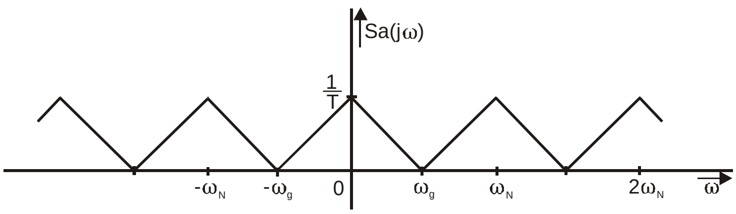
$\omega_{T2} = \frac{5}{4}\omega_0 \quad \Rightarrow g(t) = \frac{1}{T}\left[\cos\left(\frac{\omega_0}{4}t\right) + \cos(\omega_0 t)\right]$

$\omega_{T3} = \frac{9}{4}\omega_0 \quad \Rightarrow g(t) = \frac{1}{T}\cos(\omega_0 t)$

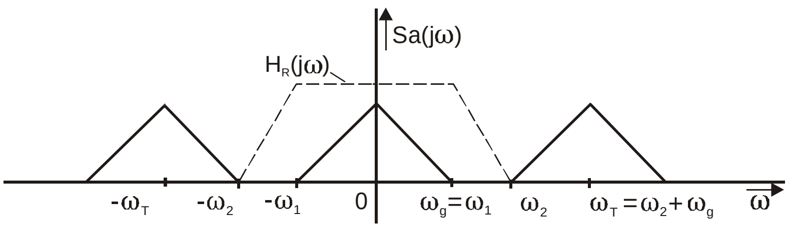
c) $\omega_T > 2\omega_0$, da Dirac-Impulse bei ω_0 sonst Nyquist-Rate $\omega_T = 2\omega_g$

Aufgabe 6.3

a) $\omega_N = 2\omega_g = \frac{2\pi}{T}$



b) c)



$\omega_1 = \omega_g$

$\omega_T = \omega_2 + \omega_g$

Aufgabe 6.4

a) $\omega_T = 2\omega_g \quad \Rightarrow S_a(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left[\frac{\omega - n\omega_T}{2\omega_g}\right] \quad \Rightarrow s_a(t) = \frac{\omega_g}{\pi}\delta(t)$

Rekonstruktion:

$$s(t) = s_a(t) * \underbrace{T\frac{\omega_g}{\pi}}_{=1} si(\omega_g t) = \frac{\omega_g}{\pi} si(\omega_g t) \qquad \omega_T = \frac{2\pi}{T}$$

b) $\omega_T = 4\omega_g \quad \Rightarrow S_a(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{\omega - n\cdot 4\omega_g}{2\omega_g}\right)$

$$\Rightarrow s_a(t) = \frac{\omega_g}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} si\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\delta(t - nT) \qquad \omega_T = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow s(t) = s_a(t) * \underbrace{\frac{T\omega_g}{\pi}}_{=1/2}\cdot si(\omega_g t) \;=\; \frac{\omega_g}{\pi} si(\omega_g t)$$

Aufgabe 6.5

a) $s_{Tre}(t) = \left[s(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT)\right] * \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

$$S_{Tre}(j\omega) = \left[S(j\omega) * \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}n\right)\right]\cdot T si\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

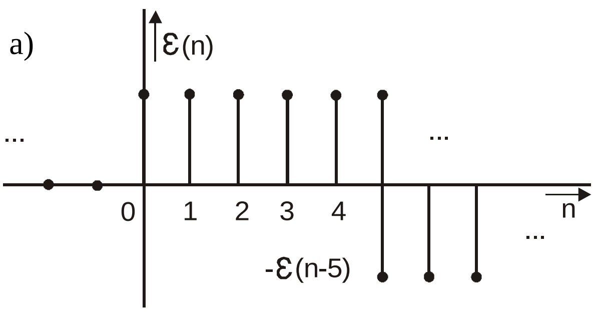
b) $S_{Tre}(j\omega)\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_g}\right)\cdot H(j\omega) \overset{!}{=} S(j\omega)$

$$H(j\omega) = \frac{1}{si\left(\frac{\omega T}{2}\right)}\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_g}\right)$$

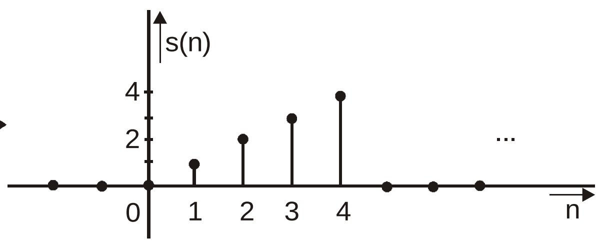
c) $H_R(j\omega) = 1 - si\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} \quad h_R(t) = \delta(t) - \frac{1}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

Aufgabe 6.6

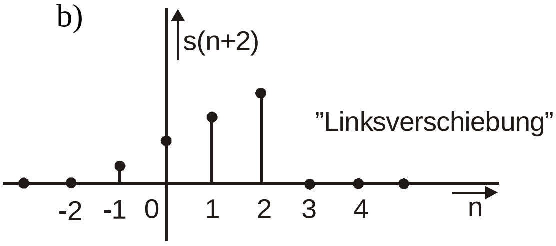
a)



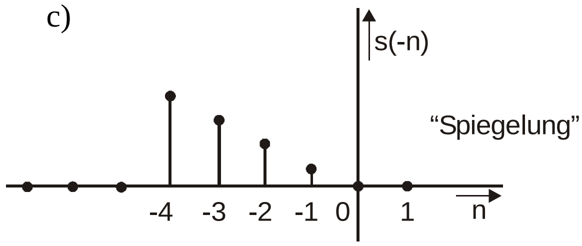
$\Rightarrow$



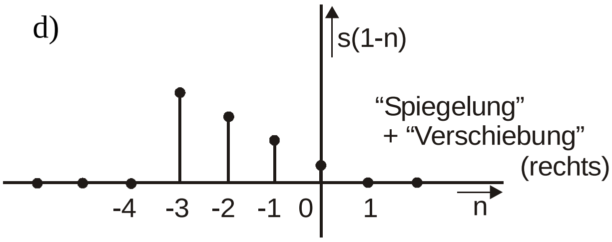
b)



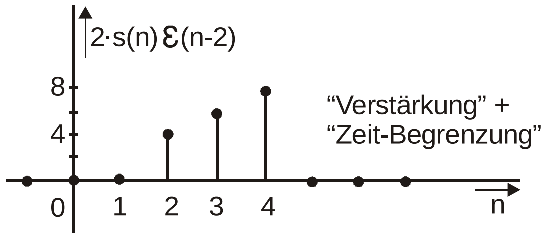
c)



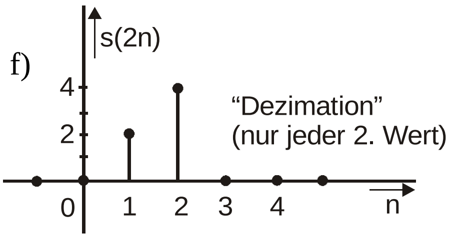
d)



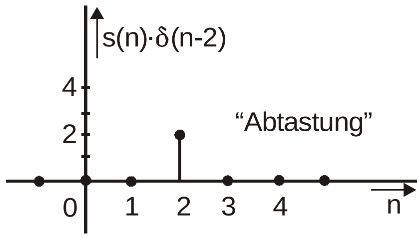
e)



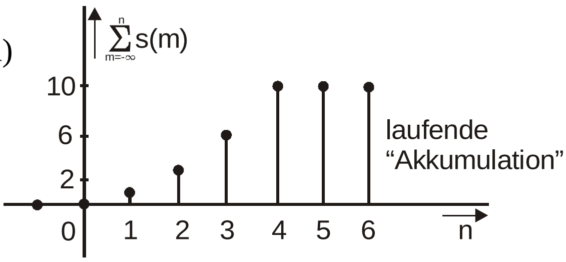
f)



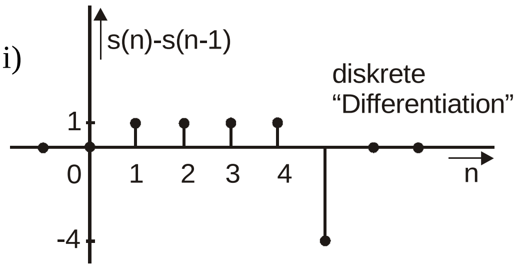
g)



h)



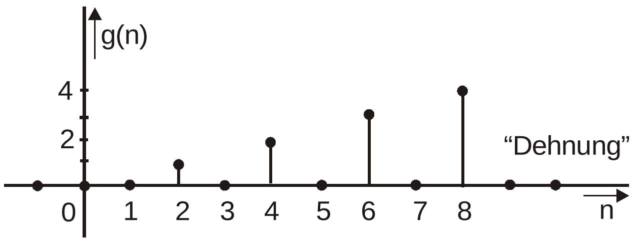
i)



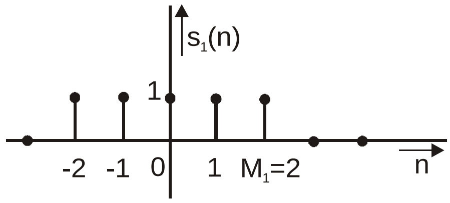
j)

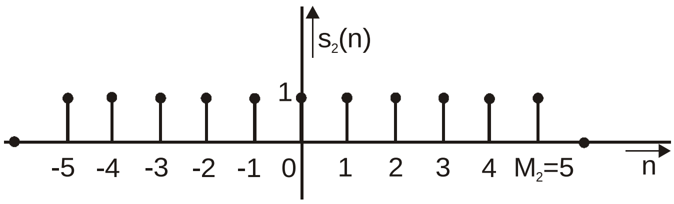
$$g(n) = \begin{cases} s\left(\dfrac{n}{2}\right) & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

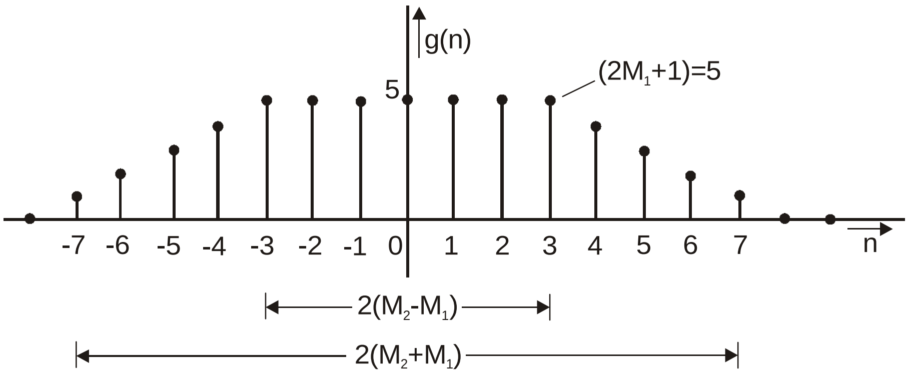
„Dehnung“



Aufgabe 6.7







Aufgabe 6.8

$$g(n) = \quad s(n-1) + g(n-1)$$

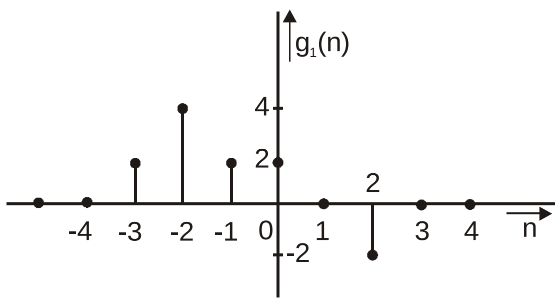
a) $\qquad s(n) = \delta(n) \quad \Rightarrow g(n) = h(n) = \varepsilon(n-1)$ $\qquad$ (Impulsantwort)

b) $\qquad s(n) = \varepsilon(n) \quad \Rightarrow g(n) = n \cdot \varepsilon(n)$ $\qquad$ (Sprungantwort)

Aufgabe 6.9

$$g(n) = s(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)\, h(n-m)$$

$$g_1(n) = s(n) * h(n+2)$$



$$g_2(n) = s(n+2) * h(n) = s(n) * \delta(n+2) * h(n) = s(n) * h(n+2) = g_1(n)$$

Aufgabe 6.10

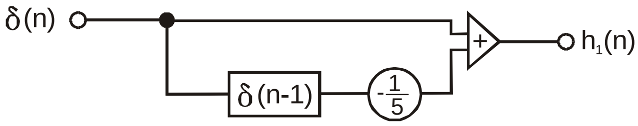
a) $$h(n) = \left(\frac{1}{5}\right)^n \varepsilon(n) = b^n \cdot \varepsilon(n)$$

$$h(n) + a\,h(n-1) = b^n \varepsilon(n) + a\,b^{n-1}\,\varepsilon(n-1)$$

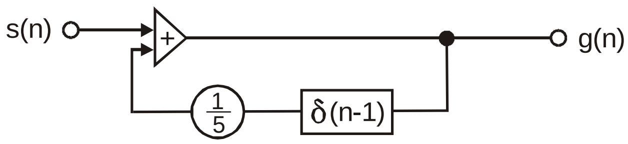
$$= \delta(n) + \underbrace{b^n\,\varepsilon(n-1) + a\,b^{n-1}\,\varepsilon(n-1)}_{\Rightarrow 0!} \overset{!}{=} \delta(n)$$

$$\Rightarrow a = -b = -\frac{1}{5}$$

b) $$h(n) - \frac{1}{5}h(n-1) = h(n) * \underbrace{\left[\delta(n) - \frac{1}{5}\delta(n-1)\right]}_{\Rightarrow\, h_1(n)} \overset{!}{=} \delta(n)$$



c) $$h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k \delta(n-k) \qquad (6.32) \qquad IIR-\text{Filter}$$



System ist kausal und amplitudenstabil $\left(\sum_{k=0}^{\infty} |h(n)| < \infty\right)$

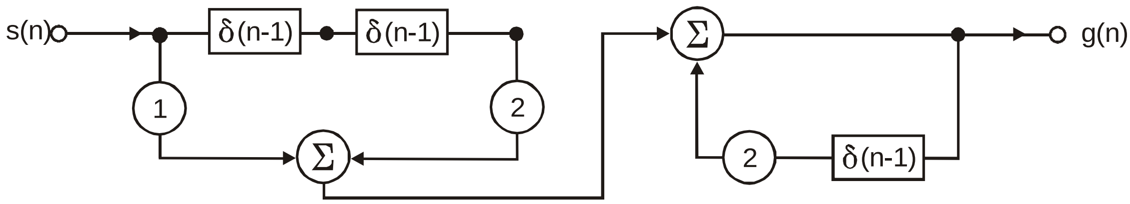
Aufgabe 6.11

$$g(n) = \frac{1}{4}g(n-1) + s(n)$$

mit $s(n) = \delta(n) \;\rightarrow\; g(n) = h(n) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k \delta(n-k) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \varepsilon(n)$

Aufgabe 6.12

a) $$g(n) = \underbrace{s(n) + 2s(n-2)}_{FIR-Teil} + \underbrace{2g(n-1)}_{IIR-Teil}$$



b) FIR-Teil: $h_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-2)$

IIR-Teil: $h_2(n) = 2^n \varepsilon(n)$

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) = 2^n \left[\varepsilon(n) + \frac{1}{2}\varepsilon(n-2) \right]$$

$\Rightarrow$ nicht amplitudenstabil

Aufgabe 6.13

$$S(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) e^{-j\Omega n} \qquad (6.40)$$

a) $$\delta(n-n_0) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(n-n_0)}_{=\begin{cases}1 & , n=n_0 \\ 0 & sonst\end{cases}} e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega n_0}$$

b) $$s(n-n_0) = s(n) * \delta(n-n_0) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} S(j\Omega) \cdot e^{-j\Omega n_0}$$

c) $$\delta(n-1) + \delta(n+1) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-j\Omega} + e^{j\Omega} = 2\cos(\Omega)$$

d) $$\delta(n+2) - \delta(n-2) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{j2\Omega} - e^{-j2\Omega} = 2j\sin(2\Omega)$$

e) $s(n) = a^{|n|}$ für $|a| < 1$

$$S(j\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j\Omega}\right)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(a e^{j\Omega}\right)^{-n} \qquad \text{mit } \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1$$

$$\Rightarrow \quad S(j\Omega) = \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos(\Omega)}$$

f) $$s(n) - s(n-1) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} S(j\Omega)\left[1 - e^{-j\Omega}\right]$$

g) $$s(n) + s(n-1) \leftrightarrow S(j\Omega)\left[1 + e^{-j\Omega}\right]$$

h) $$\frac{d}{d\Omega}S(j\Omega)=\frac{d}{d\Omega}\sum_{n=-\infty}^{\infty}s(n)e^{-jn\Omega}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-jn)s(n)e^{-j\Omega n}$$

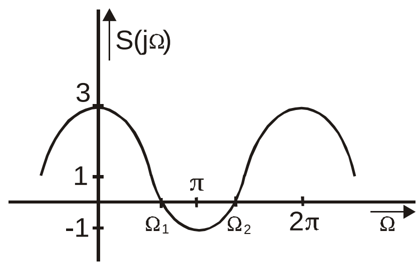
$$\Rightarrow \quad n\cdot s(n)\ \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}\ j\frac{d}{d\Omega}S(j\Omega)$$

i) $$s(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\varepsilon(n-1)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\varepsilon(n)\right]*\delta(n-1)$$

$$S(j\Omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}\cdot e^{-j\Omega}$$

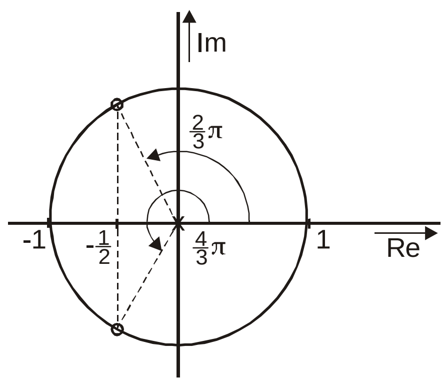
Aufgabe 6.14

a) $S(j\Omega)=1+2\cos(\Omega)$ Nullstellen: $\Omega_1=\frac{2}{3}\pi\,,\ \Omega_2=\frac{4}{3}\pi$



b) $$S_z(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\delta(n+1)+\delta(n)+\delta(n-1)\right]z^{-n}=1+z+\frac{1}{z}=\frac{z^2+z+1}{z}$$

Polstelle: $z=0$ Nullstellen: $z_{N1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{j}{2}\sqrt{3}$



Konvergenzbereich: ganze Ebene außer $z=0$

c) $$S_z\left(e^{j\Omega}\right)=e^{j\Omega}+1+e^{-j\Omega}=1+2\cos(\Omega)=S(j\Omega)$$

Aufgabe 6.15

a) $$s(n) = 7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \varepsilon(n) - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n \varepsilon(n) \qquad \Rightarrow \qquad \text{kausale Funktion}$$

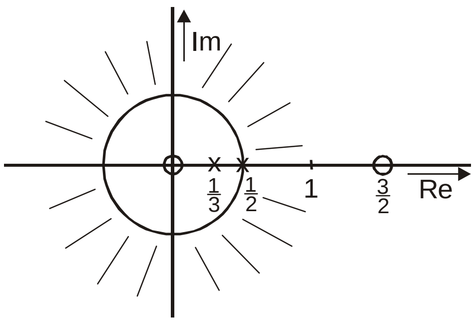
$$S(z) = \underbrace{\underbrace{\frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}}_{|z|>\frac{1}{3}} - \underbrace{\frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}_{|z|>\frac{1}{2}}}_{|z|>\frac{1}{2}}$$

Konvergenzbereich:

b) $$\Rightarrow \quad S(z) = \frac{z\left(z-\frac{3}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

Nullstellen: $z_{N1} = 0$, $z_{N2} = \frac{3}{2}$

Polstellen: $z_{p1} = \frac{1}{3}$, $z_{p2} = \frac{1}{2}$



Konvergenzbereich: $|z| > \frac{1}{2}$

Aufgabe 6.16

a) $$S(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)} = \frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{3}\right)(z-2)}$$

Polstellen: $z_{p1} = \frac{1}{3}$, $z_{p2} = 2$ Nullstellen: $z_{N1,2} = 0$

b) Konvergenzbereiche (Kb.) sind immer kreisförmig um den Nullpunkt.

1. Der Kb. enthält keine Pole.
2. $s(n)$ hat eine begrenzte Dauer $\Rightarrow$ der Kb. ist die ganze $z-$Ebene ausser $z = 0$ und/oder $z = \infty$.
3. rechtsseitige Folge: Kb. liegt bei $|z| > z_{p\max}$
4. linksseitige Folge: Kb. liegt bei $|z| < z_{p\min}$
5. zweiseitige Folge: Kb. liegt zwischen $z_{p1} < |z| < z_{p2}$

$s_1(n) -$ rechtsseitige Folge $\Rightarrow$ Kb: $|z| > 2$

$s_2(n)$ – linksseitige Folge $\Rightarrow$ Kb: $|z| < \frac{1}{3}$

$s_3(n)$ – zweiseitige Folge $\Rightarrow$ Kb: $\frac{1}{3} < |z| < 2$

c) Wenn der Einheitskreis $|z| = 1$ im Konvergenzbereich liegt, dann existiert auch die Fourier-Transformierte

hier: für $s_3(n)$ Kb.: $\frac{1}{3} < |z| < 2$

<u>Aufgabe 6.17</u>

a)
$$S(z) = \frac{3 - \frac{5}{6} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3} z^{-1}\right)} = \underbrace{\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)}}_{S_1(z)} + \underbrace{\frac{2}{\left(1 - \frac{1}{3} z^{-1}\right)}}_{S_2(z)}$$

Pole: $z_{p1} = \frac{1}{4}$, $z_{p2} = \frac{1}{3}$

$$s(n) = s_1(n) + s_2(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \varepsilon(n) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \varepsilon(n) \quad , |z| > \frac{1}{3}$$

b)
$$S_1(z), |z| > \frac{1}{4} \overset{z}{\leftrightarrow} s_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \varepsilon(n) \qquad \text{(rechtsseitig)}$$

$$S_2(z), |z| < \frac{1}{3} \overset{z}{\leftrightarrow} s_2(n) = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n \varepsilon(-n-1) \qquad \text{(linksseitig)}$$

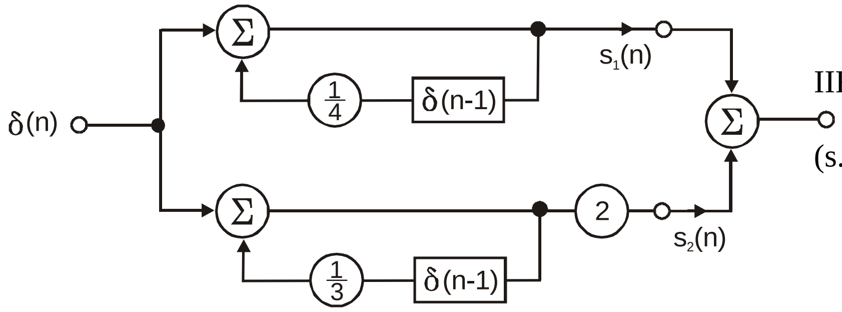
$$\Rightarrow s(n) = \frac{1}{4}^n \varepsilon(n) - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \varepsilon(-n-1) \qquad \text{(zweiseitige Folge)}$$

c)
$$S_1(z), |z| < \frac{1}{4} \overset{z}{\leftrightarrow} s_1(n) = -\left(\frac{1}{4}\right)^n \varepsilon(-n-1) \qquad \text{(linksseitig)}$$

$$S_2(z), |z| < \frac{1}{3} \overset{z}{\leftrightarrow} s_2(n) = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n \varepsilon(-n-1) \qquad \text{(linksseitig)}$$

$$s(n) = s_1(n) + s_2(n)$$

d) $\quad |z| > \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad s(n) = \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^n \varepsilon(n)}_{s_1(n)} + \underbrace{2\left(\frac{1}{3}\right)^n \varepsilon(n)}_{s_2(n)}$



IIR-Filter

(s. Abb. 6.12 und 6.32

Aufgabe 6.18

$$S(z) = 4z^2 + 2 + 3z^{-1} \qquad , \quad 0 < |z| < \infty$$

$$s(n) = 4\delta(n+2) + 2\delta(n) + 3\delta(n-1)$$

Aufgabe 6.19

$$g(n) - 2g(n-1) = s(n) + 2s(n-2)$$

a) $\quad G(z) - 2\,G(z)\cdot z^{-1} = S(z) + 2\,S(z)\,z^{-2}$

$$H(z) = \frac{G(z)}{S(z)} = \frac{z^2+2}{z(z-2)} \quad , |z| > 2 \qquad \text{(rechtsseitige Folge)}$$

b) Lineare, zeitdiskrete kausale Systeme sind stabil, wenn alle Pole innerhalb des Einheitskreises der $z-$Ebene liegen.

hier: nicht stabil, da $z_{p2} = 2$!

Aufgabe 6.20

a) $\quad H(z) = \quad H_1(z) + H_2(z)$

b) $\quad H(z) = \quad H_1(z)\cdot H_2(z)$

c) $\quad H(z) = \quad \dfrac{H_1(z)}{1 - H_1(z)\cdot H_2(z)}$

Aufgabe 6.21

a) $\left[S(z)+G(z)\cdot z^{-1}\right]\cdot 2=G(z)$

$$H(z)=\frac{G(z)}{S(z)}=\frac{2z}{z-2} \quad ,|z|>2$$

b) Filter ist kausal, da $h(n)=0$ für $n<0$

Konvergenzbereich: $|z|>2$

System <u>nicht</u> stabil, da Kb. außerhalb des Einheitskreises

c) $h(n)=2\cdot 2^{n}\varepsilon(n)=2^{n+1}\varepsilon(n)$

Aufgabe 6.22

a) $$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}}=\frac{z(z-1)}{\left(z^{2}-z-1\right)}$$

b) <u>Nullstellen:</u> $z_{N1}=0,\ z_{N2}=1$ Polstellen: $z_{p1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$

$\Rightarrow$ Konvergenzbereich (da kausal): $|z|>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$

c) $$H(z)=\frac{a_1}{1-z_{p1}\,z^{-1}}+\frac{a_2}{1-z_{p2}\,z^{-1}} \quad \text{mit} \quad a_1=\frac{z_{p1}-1}{z_{p1}-z_{p2}} \quad , \quad a_2=\frac{1-z_{p2}}{z_{p1}-z_{p2}}$$

$$\Rightarrow h(n)=a_1\left(z_{p1}\right)^{n}\varepsilon(n)+a_2\left(z_{p2}\right)^{n}\varepsilon(n) \qquad |z|>z_{p1}$$

Aufgabe 6.23

a) $$h_1(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2) \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} H_1(z)=z^{0}+z^{-1}+z^{-2}=\frac{z^{2}+z+1}{z^{2}}$$

Pole: $z_{p1,2}=0$ Nullstellen: $z_{n1,2}=-\frac{1}{2}\left(1\pm j\sqrt{3}\right)$

b) Konvergenzgebiet: $|z|>0$ gesamte $z-$Ebene

c) $$h_3(n)\overset{!}{=}h_1(n)*h_2(n) \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} H_3(z)=H_1(z)\cdot H_2(z) \Rightarrow H_2(z)=\frac{H_3(z)}{H_1(z)}$$

$$\Rightarrow H_2(z)=z^{-3}+z^{-2}+z^{-1} \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} h_2(n)=\delta(n-3)+\delta(n-2)+\delta(n-1)$$

Aufgabe 6.24

$$g_\varepsilon(n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \varepsilon(n) \qquad \rightarrow \text{ rechtsseitig, kausal}$$

a) $$G_\varepsilon(z) = \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} \quad , |z| > \frac{1}{2}$$

b) $$\varepsilon(n) * h_1(n) = g_\varepsilon(n)$$

$$\overset{z}{\leftrightarrow} \quad \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot H_1(z) = G_\varepsilon(z) \quad \Rightarrow \quad H_1(z) = \frac{\frac{1}{2}z^{-1}\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$$

Pole: $z_{p1,2} = \frac{1}{2}$ (2-fach) $\qquad \Rightarrow \qquad$ Kb: $\quad |z| > \frac{1}{2}$

c) $$H_1(z) = \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \cdot \left(1-z^{-1}\right) \quad \overset{z}{\leftrightarrow} \quad h_1(n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^n \varepsilon(n) * \left[\delta(n) - \delta(n-1)\right]$$

Aufgabe 6.25

a) $$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \overset{!}{=} z^{-n_0} \qquad \text{(vgl. Aufgabe 6.24)}$$

$$\Rightarrow \quad H_2(z) = 2 \cdot z^{-n_0} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \left[z - 1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right]$$

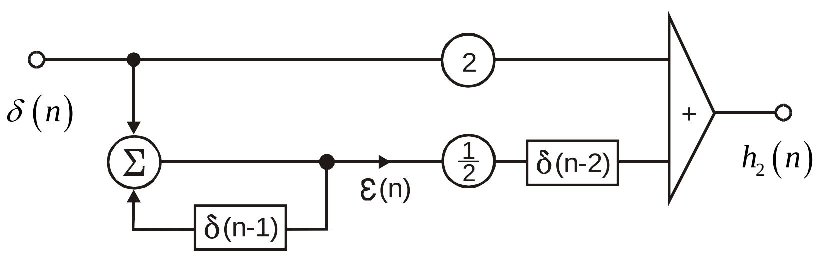
b) $$h_2(n) = 2\,\delta(n-n_0) * \varepsilon(n) * \left[\delta(n+1) - \delta(n) + \delta(n-1)\right]$$

c) $h_2(n) = 0 \quad$ für $\quad n < 0 \quad \Rightarrow \quad$ kausal

$$\Rightarrow \quad n_0 = 1$$

$$h_2(n) = 2\delta(n) + \frac{1}{2}\varepsilon(n-2)$$

d)



Aufgabe 7.1

Leitungsgleichungen:

$$\vec{U}(s) = \vec{U}_e \cosh\left(\gamma\left(l-s\right)\right) + \vec{Z}(\omega)\vec{I}_e \sinh\left(\gamma\left(l-s\right)\right) \qquad (7.31)$$

$$\vec{I}(s) = \vec{I}_e \cosh\left(\gamma\left(l-s\right)\right) + \frac{\vec{U}_e}{\vec{Z}(\omega)} \sinh\left(\gamma\left(l-s\right)\right) \qquad (7.32)$$

a) Leerlauf: $\vec{I}_e = 0 \qquad \vec{U}_2 = \vec{U}_e$

$$\Rightarrow \quad \frac{\vec{U}_2}{\vec{U}_0} = \frac{1}{\cosh(\gamma l) + \dfrac{\vec{Z}_i}{\vec{Z}(\omega)} \sinh(\gamma l)}$$

b) $\vec{Z}_i = \vec{Z}(\omega)$ (Wellenwiderstand)

$$\frac{\vec{U}_2}{\vec{U}_0} = e^{-\gamma l} = e^{-\alpha l} e^{-j\beta l} = \frac{1}{5} e^{-j\frac{3\pi}{4}}$$

Aufgabe 7.2

Aus (7.31) und (7.32) mit $\vec{I}_e = \dfrac{\vec{U}_e}{\vec{Z}_a}$ und $\vec{U}_e = \vec{U}_2$

a)
$$\frac{\vec{U}_2}{\vec{U}_0} = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{\vec{Z}_i}{\vec{Z}_a}\right)\cosh(\gamma l) + \left(\dfrac{\vec{Z}_i}{\vec{Z}(\omega)} + \dfrac{\vec{Z}(\omega)}{\vec{Z}_a}\right)\sinh(\gamma l)}$$

bei Wellenanpassung: $\vec{Z}_i = \vec{Z}_a = \vec{Z}(\omega)$

$$\Rightarrow \frac{\vec{U}_2}{\vec{U}_0} = \frac{1}{2} e^{-\gamma l}$$

b) $R' = G' = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \quad$ und $\quad \gamma = j\beta = j\omega\sqrt{L'C'}$

$$\frac{\vec{U}_2}{\vec{U}_0} = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{\vec{Z}_1}{\vec{Z}_a}\right)\cos(\beta l) + j\left(\dfrac{\vec{Z}_i}{\vec{Z}(\omega)} + \dfrac{\vec{Z}(\omega)}{\vec{Z}_a}\right)\sin(\beta l)}$$

bei Wellenanpassung:

$$\frac{\vec{U}_2}{\vec{U}_0} = \frac{1}{2} e^{-j\beta l}$$

c) $\alpha = 0 \quad \beta l = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow$ mit $\lambda = \dfrac{2\pi}{\beta} \quad \Rightarrow l = \dfrac{\lambda}{4}$ – Leitung

$$\frac{\vec{U}_2}{\vec{U}_0} = \frac{1}{j\left(\dfrac{\vec{Z}_i}{\vec{Z}(\omega)} + \dfrac{\vec{Z}(\omega)}{\vec{Z}_a}\right)}$$

d) $R' = G' = 0 \quad \Rightarrow \vec{Z}(\omega) = \sqrt{\dfrac{L'}{C'}}$ reell!

$$\left|\frac{\vec{U}_2}{\vec{U}_0}\right| = \frac{1}{\dfrac{\vec{Z}_i}{\vec{Z}(\omega)} + \dfrac{\vec{Z}(\omega)}{\vec{Z}_a}}$$

wird maximal für $\vec{Z}(\omega) = \sqrt{\vec{Z}_i \cdot \vec{Z}_a}$

$$\Rightarrow \left|\frac{\vec{U}_2}{\vec{U}_0}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\vec{Z}_a}{\vec{Z}_i}}$$

Aufgabe 7.3

$\gamma = j\beta \quad ; \quad \vec{Z}(\omega) = \sqrt{\dfrac{L'}{C'}}$ da Leitung verlustlos

a) Kurzschluß: $\vec{U}_e = 0$

$$\Rightarrow \quad \vec{Z}_{1k} = \frac{\vec{U}(0)}{\vec{I}(0)} = j\vec{Z}(\omega)\ \tan(\beta l)$$

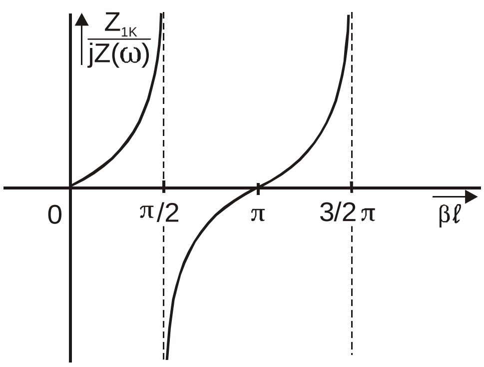
mit $\beta = \omega\sqrt{L'C'}$

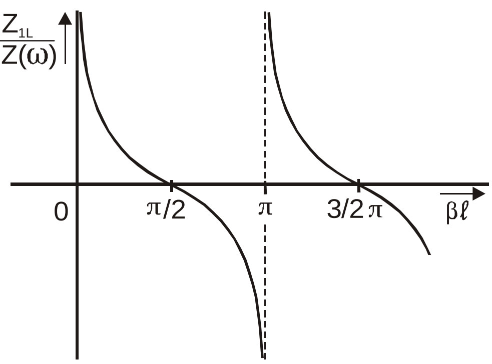
reiner Blindwiderstand

b) Leerlauf: $\vec{I}_e = 0$

$$\Rightarrow \quad \vec{Z}_{1L} = -j\,\vec{Z}(\omega)\ \cot(\beta l)$$

reiner Blindwidestand





Realisierung von Blindwiderständen in der Hochfrequenztechnik mit kurzen Leitungsstücken.

Aufgabe 7.4

Verlustlose Leitung

$$\vec{Z}_1 = \frac{\vec{U}(0)}{\vec{I}(0)} = \vec{Z}_a \frac{1 + j\dfrac{\vec{Z}(\omega)}{\vec{Z}_a}\tan(\beta l)}{1 + j\dfrac{\vec{Z}_a}{\vec{Z}(\omega)}\tan(\beta l)}$$

c) $l = \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad \tan(\beta l) = \tan\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right) = \tan(\pi) = 0$

$\Rightarrow \quad \vec{Z}_1 = \vec{Z}_a = 30\,\Omega$

d) $l = \frac{\lambda}{4} \quad \Rightarrow \quad \tan(\beta l) = \pm\infty$

$$\Rightarrow \quad \vec{Z}_1 = \frac{\left(\vec{Z}(\omega)\right)^2}{\vec{Z}_a} = 120\,\Omega$$

$\Rightarrow$ Transformation von Widerständen mit kurzen Leitungsstücken in der HF-Technik.

Aufgabe 7.5

d) Leerlauf: $\vec{I}_e = 0$

$\Rightarrow \quad \vec{U}(s) = \vec{U}_e \cos\left(\beta(l-s)\right) \qquad$ mit $\beta = \omega\sqrt{L'C'}$

$$\beta = 2\pi \cdot 16 \cdot 10^6 s^{-1} \cdot 3{,}466 \cdot 10^{-9}\,\frac{s}{m} = 2\pi \cdot 0{,}0555\, m^{-1}$$

Wellenlänge auf der Leitung: $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 18\, m$

$$\vec{U}_e = \frac{\vec{U}(0)}{\cos(\beta l)} = \frac{1\mathrm{V}_{eff}}{0{,}7705} = 1{,}298\,\mathrm{V}_{eff}$$

e) Abschlusswiderstand $\vec{R} = \vec{Z}(\omega)$ ($\Rightarrow$ keine rücklaufende Welle)

$= \vec{U}(s) = \vec{U}_e\, e^{\gamma(l-s)} = \vec{U}_e\, e^{j\beta(l-s)}$

$\left|\vec{U}(s)\right| = \left|\vec{U}_e\right| = 1\mathrm{V}_{eff} =$ konstant über ganze Leitungslänge