LEHRSTUHL
UND INSTITUT FÜR
NACHRICHTENTECHNIK

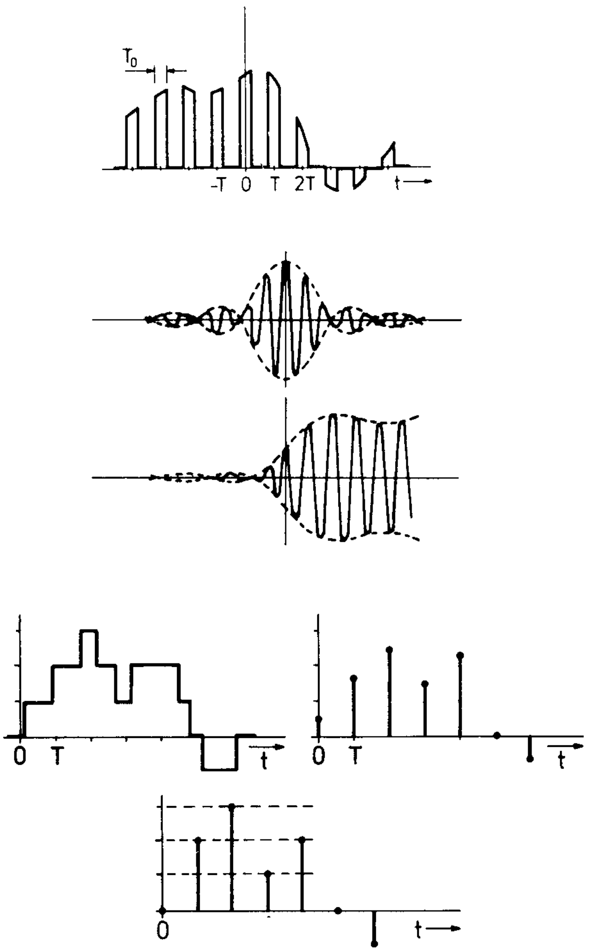
Jens-Rainer Ohm
Peter Seidler

Aufgaben zur Vorlesung

Grundgebiete

der Elektrotechnik IV

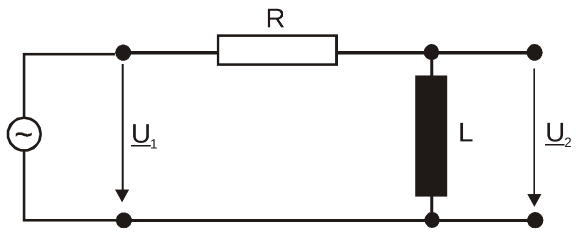
Signale, Systeme und Netzwerke



Sommersemester 2007

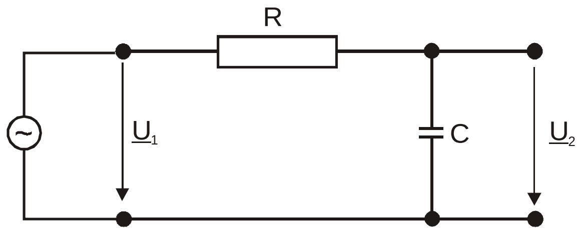
Aufgabe 1.1

Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ des folgenden Netzwerkes. Die Übertragungsfunktion ist nach Betrag und Phase darzustellen. Diskutieren Sie das Ergebnis.



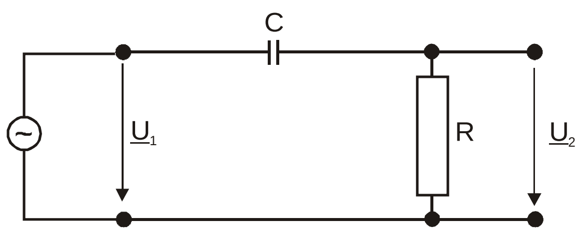
Aufgabe 1.2

Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ des folgenden Netzwerkes. Stellen Sie das Ergebnis nach Betrag und Phase dar, und diskutieren Sie dieses.



Aufgabe 1.3

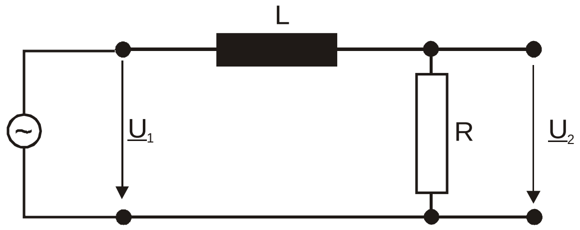
Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ des folgenden Netzwerkes. Stellen Sie das Ergebnis nach Betrag und Phase dar. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabe 1.1. Wie müssen R und C gewählt werden, damit die Übertragungsfunktion mit derjenigen aus Aufgabe 1.1 übereinstimmt?



Aufgabe 1.4

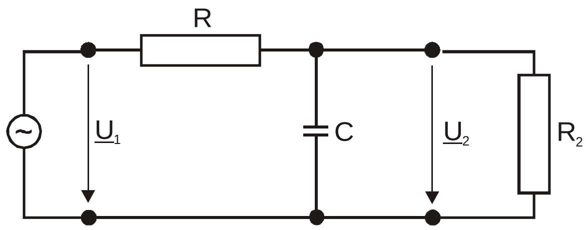
Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ des folgenden Netzwerkes. Stellen Sie das Ergebnis nach Betrag und Phase dar. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis aus

Aufgabe 1.2. Wie müssen R und L gewählt werden, damit die Übertragungsfunktion mit derjenigen aus Aufgabe 1.2 übereinstimmt?



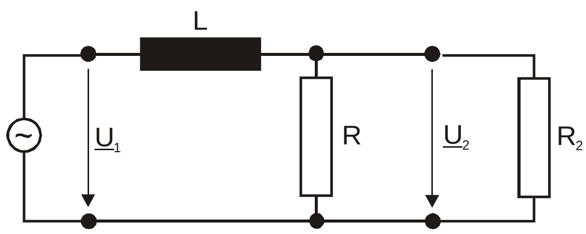
Aufgabe 1.5

Das Netzwerk aus Aufgabe 1.2 wird nun zusätzlich mit einer reellen Impedanz $Z_2 = R_2$ belastet. Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $H'(j\omega)$ des resultierenden Netzwerkes nach Betrag und Phase. Welche charakteristischen Eckdaten des Netzwerkes haben sich durch die Belastung verändert?



Aufgabe 1.6

Ebenso wird das Netzwerk aus Aufgabe 1.4 nun zusätzlich mit einer reellen Impedanz $Z_2 = R_2$ belastet. Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $H'(j\omega)$ des resultierenden Netzwerkes nach Betrag und Phase. Welche charakteristischen Eckdaten des Netzwerkes haben sich durch die Belastung verändert? Vergleichen Sie das Ergebnis auch mit dem Ergebnis aus Aufgabe 1.5.



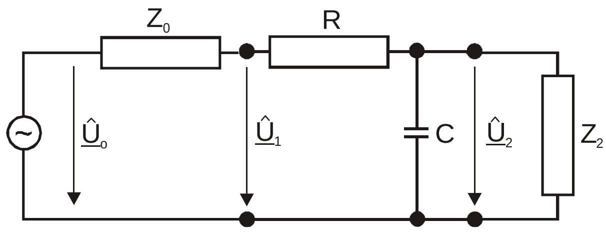
Aufgabe 1.7

Ein Signalgenerator, charakterisiert durch die Quelle $\underline{\hat{U}}_0$ und die Innenimpedanz Z_0, treibt über ein RC – Glied eine weitere Verstärkerstufe mit der Innenimpedanz Z_2.

a) Zunächst sei die folgende Verstärkerstufe nicht angeschlossen $(Z_2 \to \infty)$.

Berechnen Sie für diesen Fall den Abfall des Betrages der Übertragungsfunktion $H''(j\omega) = \underline{\hat{U}}_2 / \underline{\hat{U}}_0$ bei einer Frequenz von $20\,kHz$ gegenüber dem Gleichspannungsfall $(f = 0\,Hz)$.

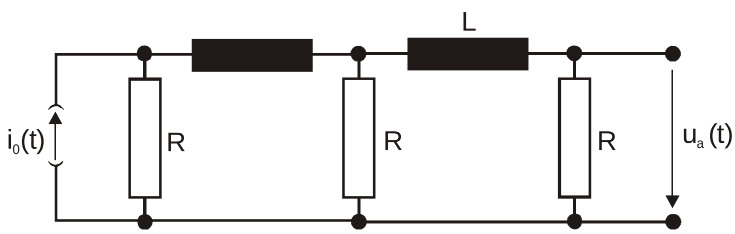
b) Wie a) jedoch nun mit angeschlossener Verstärkerstufe.



$$Z_0 = 100\Omega\, e^{j0}$$
$$R = 10k\Omega$$
$$C = 0.33nF$$
$$Z_2 = 1/\left(20\mu S + j\omega 100\,pF\right)$$

Aufgabe 1.8

Berechnen Sie die Strom- Spannungsübertragungsfunktion $H(j\omega) = U_a(j\omega)/I_0(j\omega)$ des folgenden Netzwerkes.

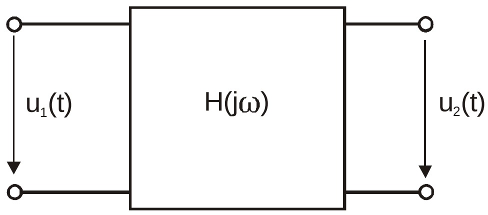


Aufgabe 1.9

Auf den Eingang eines Netzwerkes mit der komplexen Übertragungsfunktion

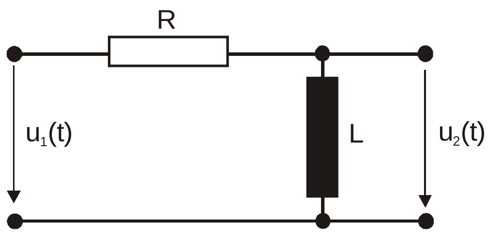
$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\phi(j\omega)}$ wird eine cosinus-förmige Eingangsspannung

$u_1(t) = \hat{u}_1 \cos(\omega t + \phi_1)$ gegeben. Bestimmen Sie die Spannung $u_2(t)$ an den Ausgangsklemmen als Funktion von Betrag und Phase der Übertragungsfunktion.



Aufgabe 1.10

Man betrachte nun das Netzwerk aus Aufgabe 1.1:



$R = 1k\Omega$
$L = 1mH$
$\tau = L/R = 1\mu s$

Auf den Eingang wird die Spannung $u_1(t)$ gegeben:

$$u_1(t) = 1\,\mathrm{V} + 1\,\mathrm{V}\cos(\omega_0 t) - 0{,}3\,\mathrm{V}\cos(3\omega_0 t) \qquad \text{mit} \qquad \omega_0 = 2\pi f_0\ ;\ f_0 = 100\ kHz$$

a) Bestimmen Sie Betrag und Phase der Übertragungsfunktion bei den Kreisfrequenzen ω_0 und $3\omega_0$.

b) Berechnen Sie nun die Ausgangsspannung $u_2(t)$.

c) Skizzieren Sie die Eingangsspannung $u_1(t)$ und die Ausgangsspannung $u_2(t)$ und diskutieren Sie das Ergebnis. Betrachten Sie auch (qualitativ) den Grenzfall $\omega_0 >> 1/\tau$.

Aufgabe 2.1

Skizzieren Sie folgende Signale:

a) $\varepsilon(-t)$; $\varepsilon(1-t)$; $\varepsilon(t/T)$; $\varepsilon(1-t^2)$

b) $\mathrm{rect}(t-1)$; $\mathrm{rect}(2-t)$; $\mathrm{rect}(2t+1)$

c) $r(t)=t\cdot\varepsilon(t)$ und damit $r(t)-r(t-T)$

d) $\mathrm{rect}(t)\cdot\cos(2\pi Ft)$ für $F=0{,}5;\ \ 1;\ \ 10$

e) $\mathrm{rect}\left(\dfrac{t+b}{a}\right)$ für $a=\pm 2$ und $b=\pm 1$ oder $b=0$

f) $g(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\varepsilon(\tau)\,d\tau$

Aufgabe 2.2

Prüfen Sie die folgenden Transformationen $g(t)=Tr\{s(t)\}$ daraufhin, ob diese lineare und/oder zeitinvariante Systeme beschreiben.

a) $g(t)=\dfrac{d}{dt}s(t)$

b) $g(t)=s(-t)$

c) $g(t)=1+s(t)$

d) $g(t)=s(t)\cdot m(t)$ $\left[m(t)\ \text{beliebig und unabhängig von}\ s(t)\right]$

e) $g(t)=s^2(t)$

f) $g(t)=s\left(\dfrac{t}{3}\right)$

g) $g(t)=s(t-2)+s(2+t)$

h) $g(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}s(\tau)\,d\tau$

Aufgabe2.3

Berechnen und skizzieren Sie:

a) $g(t)=\varepsilon(t)*\mathrm{rect}(t)$

b) $g(t)=\mathrm{rect}(t)\ *\ \mathrm{rect}(t)$

c) $g(t)=\left[\varepsilon(t)\cdot e^{-t}\right]*\left[\varepsilon(t)\cdot e^{-t}\right]$

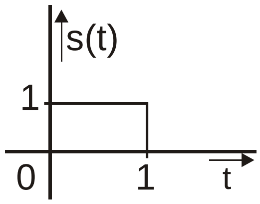
Aufgabe 2.4

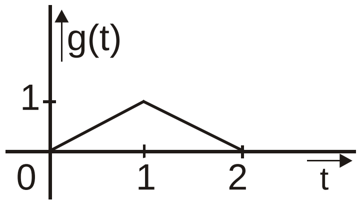
Berechnen Sie

$$\varepsilon(t) * \left[e^{t} \cdot \varepsilon(t)\right] \qquad \text{und} \qquad \left[\varepsilon(t) * e^{t}\right] \cdot \varepsilon(t)$$

Aufgabe 2.5

Ein LTI-System antwortet auf ein Signal $s(t)$ mit $g(t)$





Skizzieren Sie die Antwort des LTI-Systems auf das Eingangssignal

a) $s(t) - s(t-2)$

b) $s(t) + 2s(t+1)$

c) $s\left(t/2\right)$

Aufgabe 2.6

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\left[\frac{d}{dt}\, s(t)\right] * h(t) = \left[\frac{d}{dt}\, h(t)\right] * s(t)$$

Aufgabe 2.7

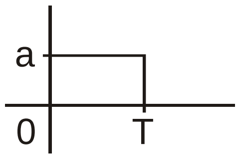
Zwei beliebige Signale $s(t)$ mit der Fläche A_s und $g(t)$ mit der Fläche A_g werden gefaltet.

Zeigen Sie, dass das Faltungsprodukt die Fläche $A_s \cdot A_g$ hat.

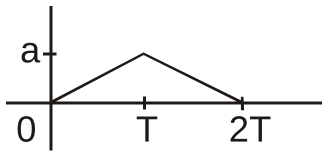
Aufgabe 2.8

Skizzieren Sie die Antwort eines Integrators und eines Differentiators auf die folgenden Signale

a)



b)



Aufgabe 2.9

Die Impulsantwort eines RC-Systems lautet: $h(t) = \frac{1}{T}\varepsilon(t) \cdot e^{-t/T}$

a) Ist das System kausal? (zeigen!)

b) Ist das System amplitudenstabil? (zeigen!)

Aufgabe 2.10

Der gerade und ungerade Anteil eines reellwertigen Signals $s(t)$ sind definiert in $(3.56)-(3.58)$.

a) Skizzieren Sie $s_g(t)$ und $s_u(t)$

für $s(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)$

und $s(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{4}\right)$

b) Zeigen Sie, dass für reellwertige Energiesignale gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_g^2(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} s_u^2(t)\,dt$$

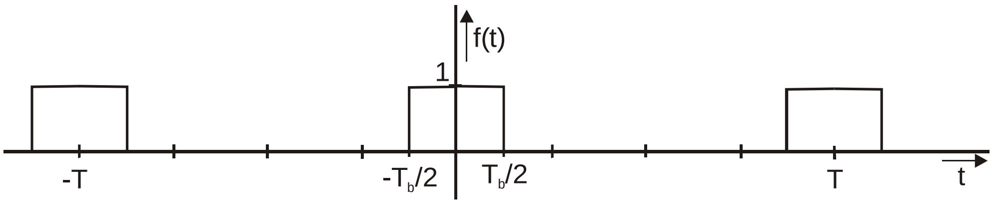
Aufgabe 3.1

Die unten dargestellte mit T periodische Funktion $f(t)$ soll durch die reelle Fourier-Reihe

$$f(t) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(k\omega_0 t) - b_k \sin(k\omega_0 t)\right]$$

wobei $a_k = \mathrm{Re}\{c_k\}$ und $b_k = \mathrm{Im}\{c_k\}$

approximiert werden.



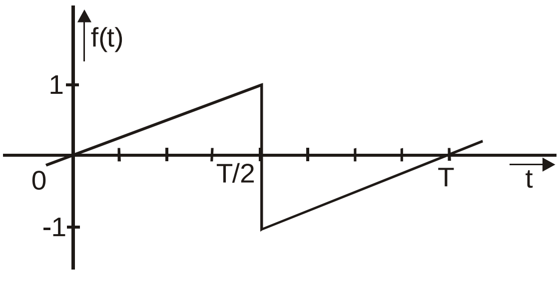
Beweisen Sie dann, dass im Fall reeller gerader Funktionen, also für

$$f(-t) = f(t)$$

die Sinuskoeffizienten $b_k = \mathrm{Im}\{c_k\}$ der Fourier-Reihe generell verschwinden.

Aufgabe 3.2

Approximieren Sie die folgende mit T periodische Funktion $f(t)$ (Sägezahnfunktion) mit Hilfe der reellen Fourier-Reihe gewichteter Sinus- und Cosinusfunktionen. (s. 3.1)



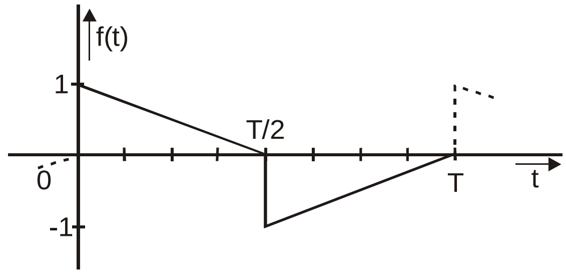
Beweisen Sie dann , dass im Fall reeller ungerader Funktionen, also für

$$f(-t) = -f(t)$$

die Cosinuskoeffizienten $a_k = Re\{c_k\}$ der Fourier-Reihe generell verschwinden.

Aufgabe 3.3

Approximieren Sie die unten abgebildete mit T periodische Funktion $f(t)$ mit Hilfe der reellen Fourier-Reihe gewichteter Sinus- und Cosinusfunktionen.



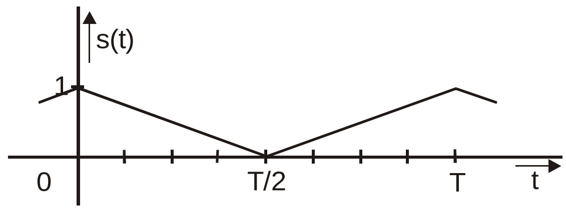
Beweisen Sie dann, dass im Fall reeller vollständig symmetrischer Funktionen, also für

$$f(t+T/2) = -f(t)$$

alle <u>geraden</u> Sinus- und Cosinuskoeffizienten der Fourier-Reihe verschwinden.

Aufgabe 3.4

Die unten abgebildete mit T periodische Funktion $s(t)$ (Dreiecksfunktion) soll durch eine reelle Fourier-Reihe gewichteter Sinus- und Cosinusfunktionen approximiert werden.



a) Bestimmen Sie den Gleichanteil c_0 von $s(t)$.

b) Ermitteln und vergleichen Sie die Symmetrien der Spannungsfunktionen $s(t)$ und $\left(s(t)-c_0\right)$.

c) Berechnen Sie nun auf Basis der ermittelten Symmetrien die Fourierkoeffizienten von $s(t)$.

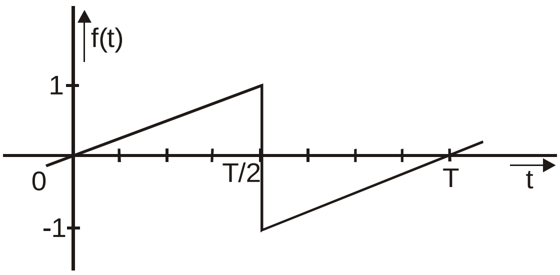
Aufgabe 3.5

Es ist ein allgemeiner formelmäßiger Zusammenhang zwischen den reellen und den komplexen Fourierkoeffizienten zu ermitteln.

a) Stellen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten c_k als Funktion der reellen Fourierkoeffizienten a_k und b_k dar.

b) Stellen Sie die reellen Fourierkoeffizienten a_k und b_k als Funktion der komplexen Fourierkoeffizienten dar.

Aufgabe 3.6

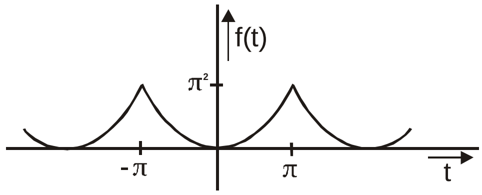


a) Bestimmen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten c_k der oben abgebildeten mit T periodischen Funktion $f(t)$ über die Integraldefinition. Verifizieren Sie das Ergebnis durch Vergleich mit den reellen Koeffizienten a_k und b_k aus Aufgabe 3.2. Skizzieren Sie $|c_k|$, φ_k, a_k und b_k.

b) Skizzieren Sie die um $T/2$ verschobene Funktion $f_1(t) = f(t - T/2)$. Berechnen Sie mit Hilfe des Verschiebesatzes deren komplexe Fourierkoeffizienten c_{1k} und skizzieren Sie das Ergebnis (nach Betrag und Phase). Ermitteln Sie aus den gewonnenen c_{1k} die reellen Koeffizienten a_{1k} und b_{1k} und skizzieren Sie das Ergebnis

c) Wie b), jedoch für die um $T/4$ verschobene Funktion $f_2(t) = f(t - T/4)$.

Aufgabe 3.7



Die oben dargestellte Funktion $f(t)$ besteht stückweise aus Parabeln.

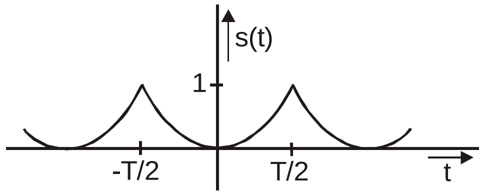
Im Intervall $-\pi \le t \le \pi$ gilt: $f(t) = t^2$

Von der Funktion $f(t)$ ist die folgende Reihenentwicklung bekannt:

$$f(t) = A - 4\left(\frac{\cos t}{1^2} - \frac{\cos 2t}{2^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} - \ldots\ldots\right)$$

Die Größe A stellt den Gleichanteil von $f(t)$ dar.

Es soll nun die unten dargestellte, in ihrem zeitlichen Verlauf der Funktion $f(t)$ ähnliche Spannung $s(t)$ betrachtet werden.



a) Durch welche Parabel wird $s(t)$ im Intervall $-T/2 \le t \le T/2$ beschrieben?

b) Wie groß ist der Gleichanteil c_0 von $s(t)$?

c) Bestimmen Sie durch geeignete Substitution anhand der Reihenentwicklung von $f(t)$ eine Fourier-Reihe für $s(t)$.

d) Geben Sie die reellen Fourier-Koeffizienten a_k und b_k von $s(t)$ an.

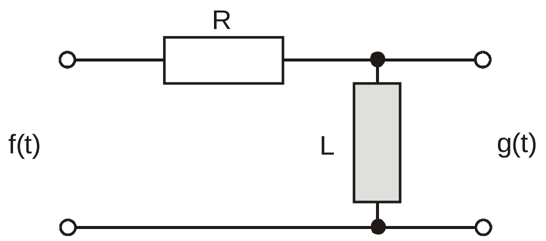
e) Bestimmen Sie aus den reellen Fourier-Koeffizienten die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k.

f) Berechnen Sie aus den komplexen Fourier-Koeffizienten c_k den Effektivwert S_{eff} von $s(t)$.

Hinweis: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Aufgabe 3.8

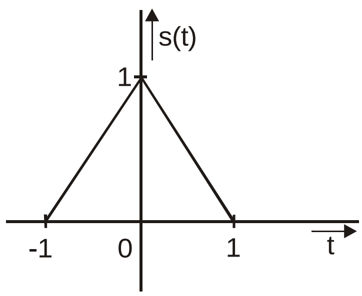
Eine mit T periodische Rechteckimpulsfolge $f(t)$ nach Aufgabe 3.1 wird über einen R/L-Hochpass übertragen.



$$\frac{L}{R} = T$$

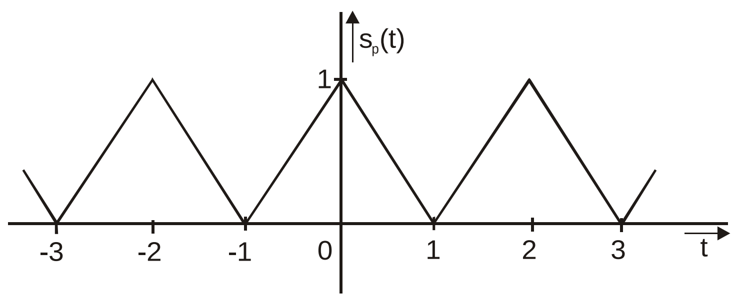
Berechnen Sie das Ausgangssignal $g(t)$ mit Hilfe der Fourier-Reihenentwicklung von $f(t)$.

Aufgabe 3.9



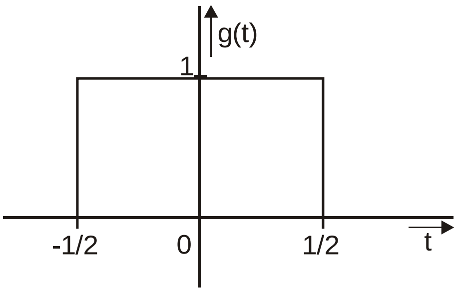
a) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $S(j\omega)$ der oben abgebildeten Dreiecksfunktion $s(t)$.

b) Die Funktion $f(t)$ werde nun mit der Periode $T = 2$ periodisch wiederholt, so dass sich die periodische Funktion $s_p(t)$ ergibt.



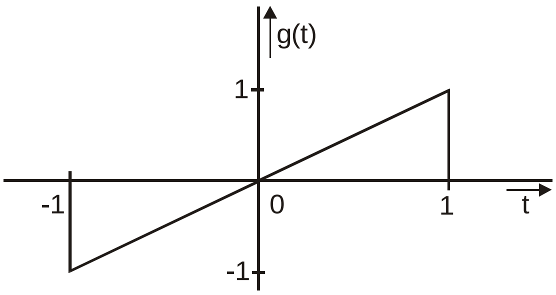
Bestimmen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten c_k von $s_p(t)$, indem Sie in $S(j\omega)$ den Übergang $\omega -> n\omega_0$ (mit $\omega_0 = 2\pi/T$) machen.

Aufgabe 3.10



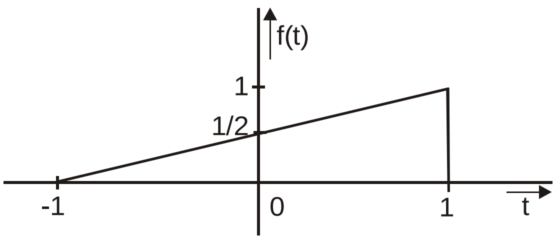
Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $G(j\omega)$ der obigen Rechteckimpulsfunktion $g(t)$.

Aufgabe 3.11



a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $G(j\omega)$ der obigen Zeitfunktion $g(t)$.

b) Gegeben sei nun folgende Zeitfunktion $f(t)$:



Zerlegen Sie $f(t)$ folgendermaßen in eine gerade und eine ungerade Funktion:

$$f(t) = f_g(t) + f_u(t)$$

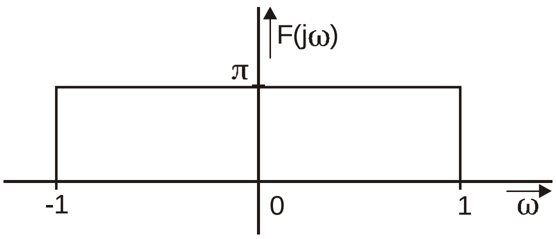
mit $f_g(t) = 1/2\left(f(t) + f(-t)\right)$

und $f_u(t) = 1/2\left(f(t) - f(-t)\right)$.

Bestimmen Sie $f_g(t)$ und $f_u(t)$ sowie die zugehörigen Fouriertransformierten $F_g(j\omega)$ und $F_u(j\omega)$. Bestimmen Sie durch Überlagerung $F(j\omega)$.

c) Welche Zusammenhänge bestehen allgemein zwischen den geraden und ungeraden Funktionsteilen von $f(t)$ und Real- und Imaginärteil von $F(j\omega)$?

Aufgabe 3.12



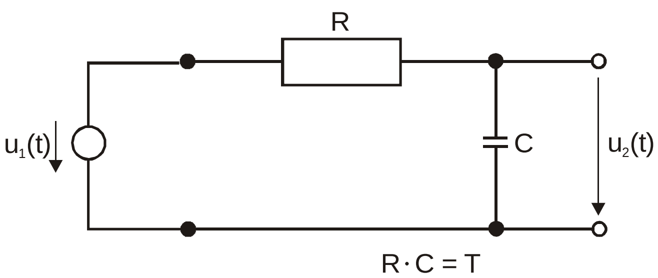
a) Bestimmen Sie mittels inverser Fouriertransformationen die zu $F(j\omega)$ gehörige Zeitfunktion $f(t)$.

b) Welchen Wert hat die Fläche unter der Zeitfunktion $f(t)$?

c) Welche Energie E besitzt die Zeitfunktion $f(t)$?

Aufgabe 3.13

Gegeben sei folgendes Netzwerk:

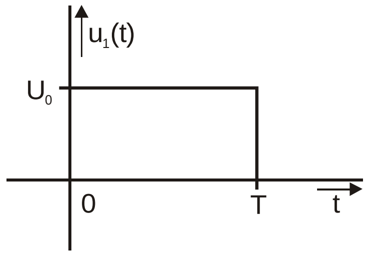


a) Geben Sie die Übertragungsfunktion $H(j\omega) = U_2(j\omega)/U_1(j\omega)$ des Netzwerkes an.

b) Berechnen Sie mittels der inversen Fourier-Transformation die Impulsantwort $h(t)$ des Netzwerkes.

c) Bestimmen Sie die Sprungantwort $h_\varepsilon(t)$ des Netzwerkes. Es sei $u_1(t) = U_0 \cdot \varepsilon(t)$.

d) Berechnen Sie unter Verwendung der Ergebnisse aus c) die Ausgangsspannung $u_2(t)$ für den unten dargestellten zeitlichen Verlauf der Eingangsspannung $u_1(t)$.



e) Skizzieren Sie die Ausgangsspannung $u_2(t)$ unter Angabe von allen charakteristischen Größen.

Aufgabe 3.14

a) Berechnen Sie jeweils über ein Intervall der Länge $T = 2\pi/\omega_0$:

i. $\int_T \sin m\omega_0 t \sin n\omega_0 t \quad dt$

ii. $\int_T e^{jm\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt$

b) Funktionensysteme $\{\phi_k(t)\}$ mit der Eigenschaft

$$\int_T \phi_m(t)\phi_n^*(t)\,dt = 0 \quad , \quad \begin{matrix} m \neq n \\ m,n \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

werden *orthogonal* (über ein Intervall der Länge T) genannt. Sie sind weiterhin *orthonormal* über $[T]$, wenn gilt:

$$\int_T |\phi_k(t)|^2 \; dt \; = 1 \qquad k \in \mathbb{Z}$$

i. Definieren Sie die Beispiele aus a) als Funktionssysteme $\phi_k(t)$. Sind diese orthogonal bzw. orthonormal über $[T]$?

ii. Zeigen Sie, dass bei Signalen

$$s(t) = \sum_i c_i \; \phi_i(t)$$

(c_i komplex, $\phi_i(t)$ orthonormal)

allgemein gilt:

$$\int_T |s(t)|^2 \; dt \quad = \sum_i |c_i|^2$$

Aufgabe 4.1

Ein idealer Kurzzeit - Integrator besitzt die Impulsantwort:

$$h(t) = \frac{1}{T}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right).$$

a) Berechnen Sie das Ausgangssignal $g(t) = \underbrace{\cos(\omega_1 t)}_{s(t)} * h(t)$ für die Fälle

$$\omega_1 = k \cdot \frac{2\pi}{T} \text{ und } \omega_1 = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2\pi}{T}.$$

b) Bestimmen Sie $S(j\omega)$, $H(j\omega)$ und interpretieren Sie das Ergebnis aus a) im Frequenzbereich.

Aufgabe 4.2

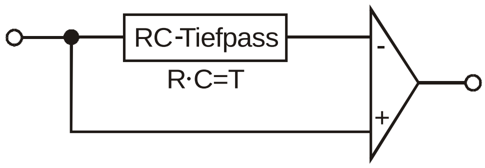
a) Beschreiben Sie einen RC-Tiefpass $(R \cdot C = T)$ durch $|H(j\omega)|$ und $\varphi(\omega)$.
(vgl. Aufg. 2)

b) Berechnen Sie das Dämpfungsmaß $a(\omega)$, die Phasenlaufzeit $t_p(\omega)$ und die Gruppenlaufzeit $t_g(\omega)$.

c) Ist der $RC-$Tiefpass ein linearphasiges System? Treten bei Übertragung rein sinusförmiger Signale Phasenverzerrungen auf?

d) Welche Verzerrungen erfährt eine periodische Rechteckimpulsfolge der Periode T?

Aufgabe 4.3



a) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h(t)$ des Systems.

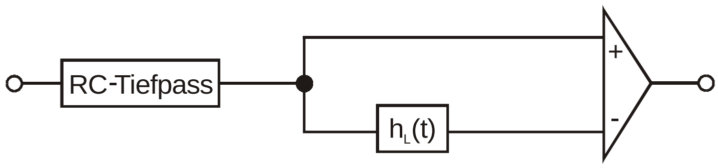
b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ mit Hilfe der Fourier-Transformation.

c) Skizzieren Sie die Schaltung eines Vierpoles mit einem Widerstand R und einem Kondensator C mit der gleichen Übertragungsfunktion $H(j\omega)$.

d) Wie c) mit Widerstand R und Induktivität L.
Wie muss die Zeitkonstante L/R gewählt werden?

Aufgabe 4.4

Ein „Kurzzeit-Integrator“ mit der Impulsantwort $h_1(t) = \frac{1}{T}\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T_1} - \frac{1}{2}\right)$ soll mit einem Laufzeitglied $\left(h_L(t) = \delta(t - t_0)\right)$ und einen $RC-$Tiefpass $(RC = T)$ wie abgebildet approximiert werden.



d) Wie müssen $R \cdot C = T$ sowie t_0 gewählt werden, damit die Impulsantwort $h(t)$ des Systems um maximal 1% von der idealen Rechteckform $h_1(t)$ abweicht?

e) Skizzieren Sie die reale Impulsantwort $h(t)$.

Aufgabe 4.5

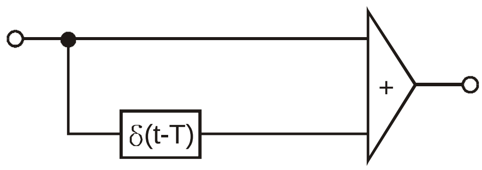
a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ der rückwirkungsfreien Kettenschaltung zweier identischer $RC-$Tiefpässe $(R \cdot C = T)$.

b) Bestimmen und skizzieren Sie die Impulsantwort $h(t)$ der Kettenschaltung.

c) Bestimmen Sie die Impulsantwort des $RLC-$Systems (Vorl. Abb. 1.6) für den Grenzfall $(b = 0)$ aus (1.37). Geben Sie Beziehungen für R, L und C an, so dass sich identische Eigenschaften mit der $RC-$Kettenschaltung ergeben.

Aufgabe 4.6

a) Bestimmen Sie Impulsantwort $h(t)$ und Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ des folgenden „Kammfilters“ nach Betrag und Phase:



b) Bestimmen und skizzieren Sie das Dämpfungsmaß $a(\omega)$ sowie das Phasenspektrum $\varphi(\omega)$.

Aufgabe 4.7

a) Bestimmen Sie für das $RLC-$Netzwerk (Abb. 1.6) aus der Sprungantwort (1.40) die Impulsantwort $h(t)$ für den Fall $B = 1$, $a = \frac{R}{2L}$ und $\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$, wobei $\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L}\right)^2$ ist.

Berechnen Sie weiterhin die Übertragungsfunktion $H(j\omega)$.

b) Es sei $R = 0$. Bei welcher Frequenz ω_0 wird das System schwingen (Oszillator)? Skizzieren Sie $|H(j\omega)|$.

Hinweis: $$\int e^{ax} \sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left(a \sin(bx) - b\cos(bx)\right)$$

Aufgabe 5.1

Berechnen Sie die Laplace-Transformierten $F(s)$ sofern sie existieren.

Ermitteln Sie den Konvergenzbereich der Laplace-Transformierten, indem Sie eine Bedingung für s bestimmen, so dass (5.7) konvergiert.

a) $f(t) = \sin(t) \cdot \varepsilon(t)$

b) $f(t) = \sin(t)$

c) $f(t) = e^{2t}\, \varepsilon(t-T)$

d) $f(t) = t \cdot e^{2t}\, \varepsilon(t)$

e) $f(t) = \sinh(2t)\, \varepsilon(-t)$

Aufgabe 5.2

Beweisen Sie die Linearität der Laplace-Transformation

$$f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \quad \overset{L}{\leftrightarrow} \quad F(s) = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

Geben Sie den Konvergenzbereich R von $F(s)$ an, wenn R_1 bzw. R_2 die Konvergenzbereiche bzgl. $F_1(s)$ und $F_2(s)$ sind.

Aufgabe 5.3

Es seien $F(s) = \dfrac{2s+3}{s^2+3s+2}$ und $G(s) = \dfrac{3s+1}{s^2+4s+3}$

die Laplace-Transformierten zweier rechtsseitiger Signale.

a) Berechnen Sie die Pole von $F(s)$ und geben Sie den Konvergenzbereich an.

b) Berechnen Sie die Pole von $G(s)$ und geben Sie den Konvergenzbereich an.

c) Berechnen Sie die Pole und Nullstellen von $F(s)+G(s)$ und geben Sie den Konvergenzbereich an.

Aufgabe 5.4

Beweisen Sie den Verschiebungssatz $f(t-t_0) \overset{L}{\leftrightarrow} F(s)e^{-s\,t_0}$

und den Modulationssatz $f(t)\cdot e^{s_0 t} \overset{L}{\leftrightarrow} F(s-s_0)$

mit Hilfe der zweiseitigen Laplace-Transformation.

Wie ändert sich der Konvergenzbereich?

Aufgabe 5.5

Beweisen Sie die Zeitdehnung $f\left(\frac{t}{T}\right) \overset{L}{\leftrightarrow} |T|F(sT)$.

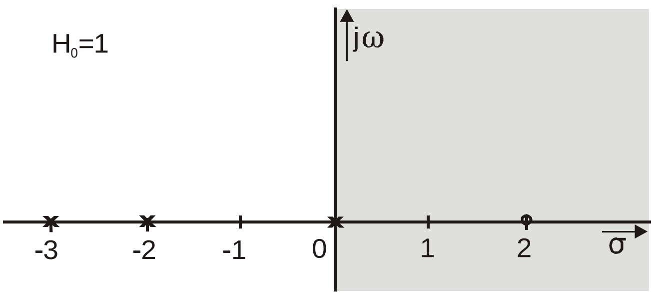
Wie ändert sich der Konvergenzbereich?

Aufgabe 5.6

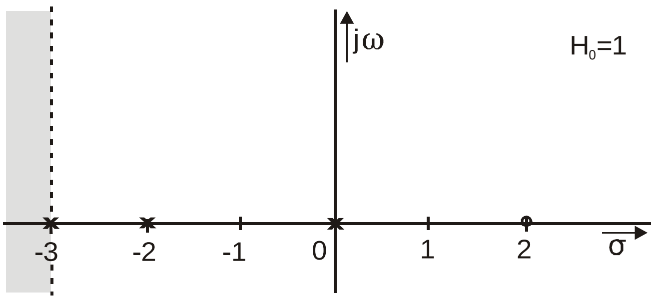
Entscheiden Sie, welches der nachfolgenden Pol-Nullstellen-Diagramme mit dem jeweils eingezeichneten Konvergenzgebiet (grau unterlegt) richtig oder falsch ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Geben Sie, sofern möglich, die Bildfunktion $H(s)$ und die zugehörige Zeitfunktion $h(t)$ an.

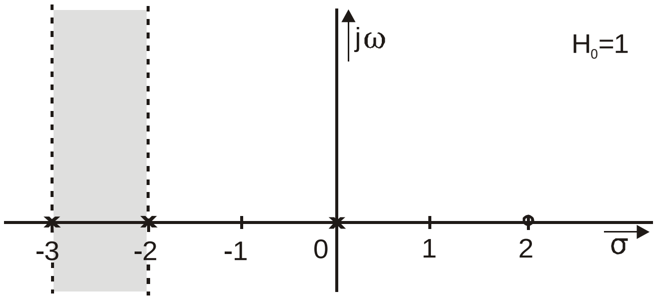
a)



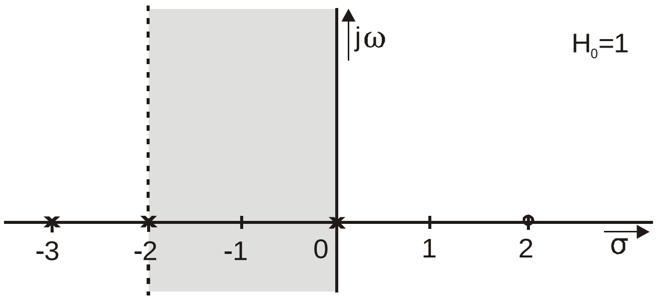
b)



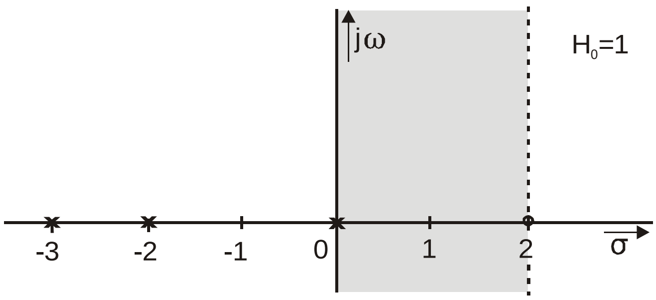
c)



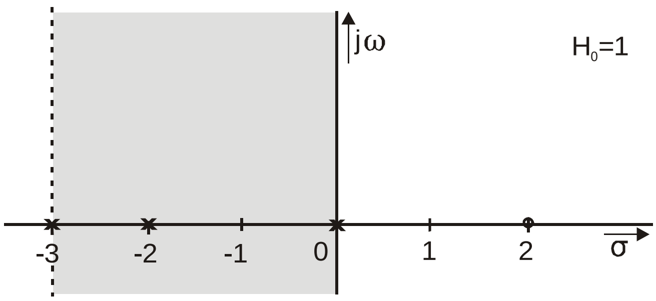
d)



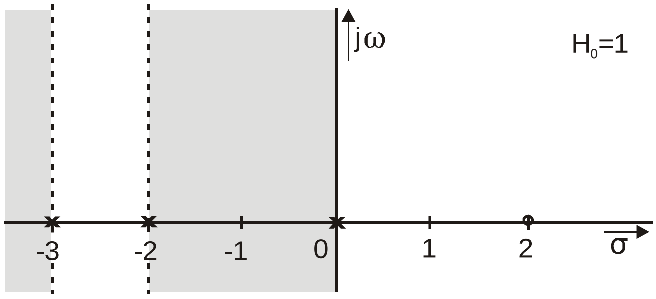
e)



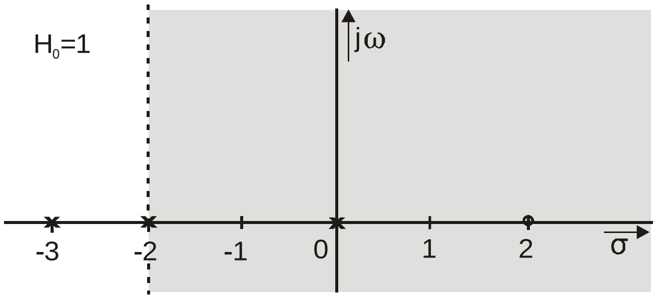
f)



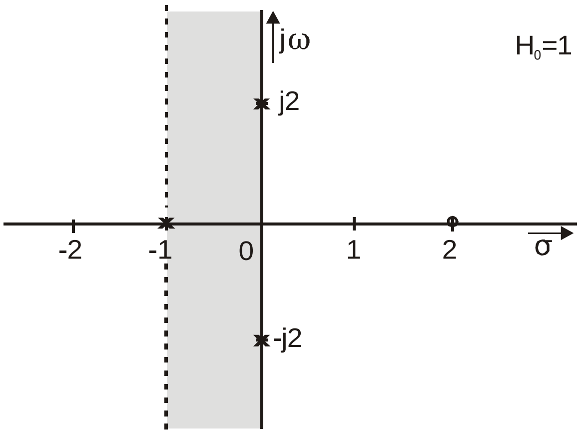
g)


jω
H0=1
-3
-2
-1
0
1
2
σ

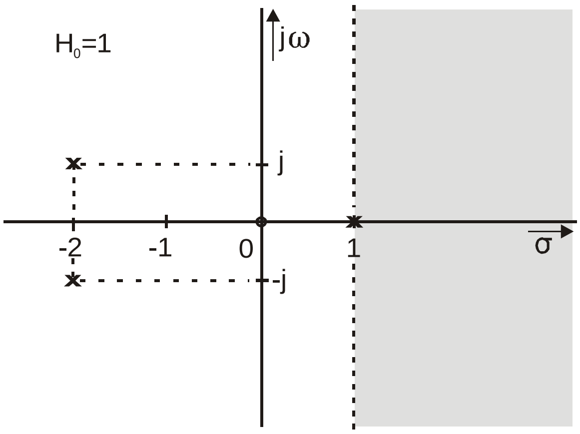
h)


H0=1
jω
-3
-2
-1
0
1
2
σ

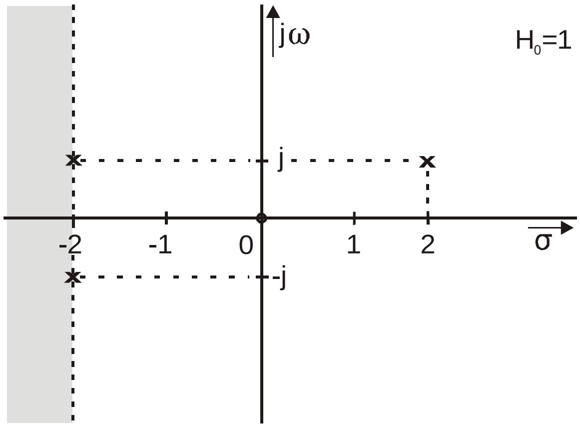
i)


jω
H0=1
j2
-2
-1
0
1
2
σ
-j2

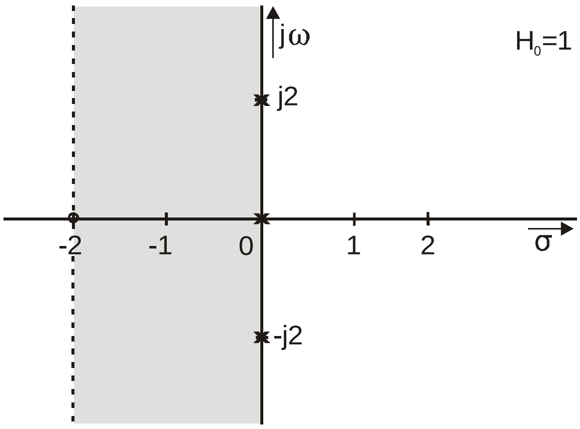
j)


H0=1
jω
j
-2
-1
0
1
σ
-j

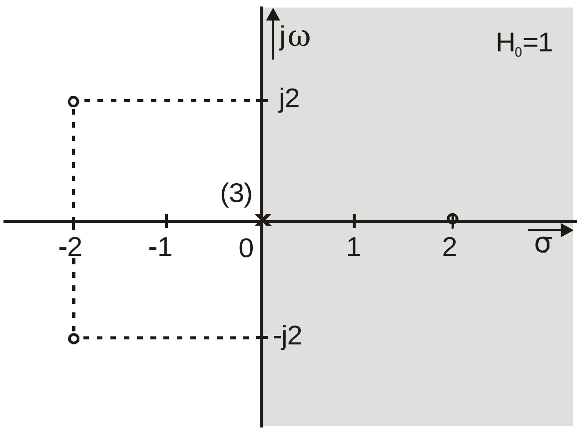
k)



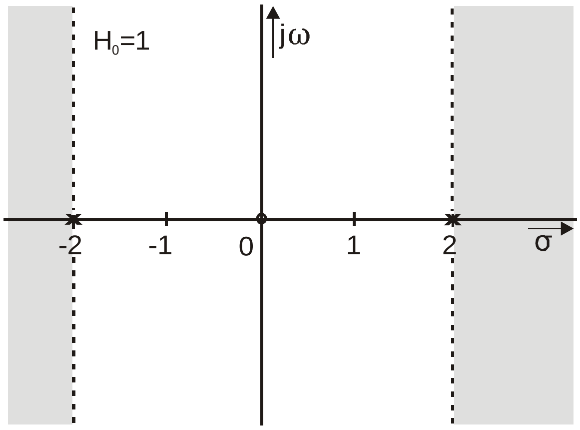
l)



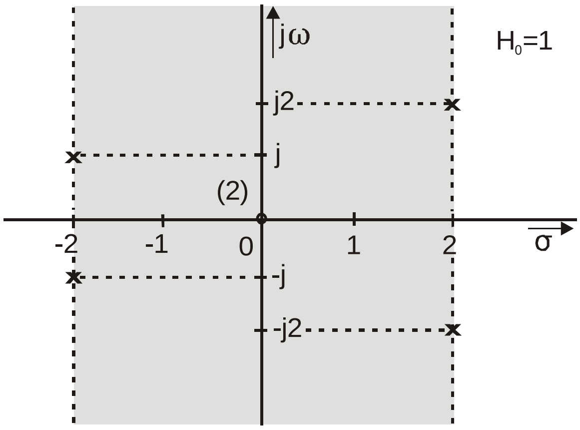
m)



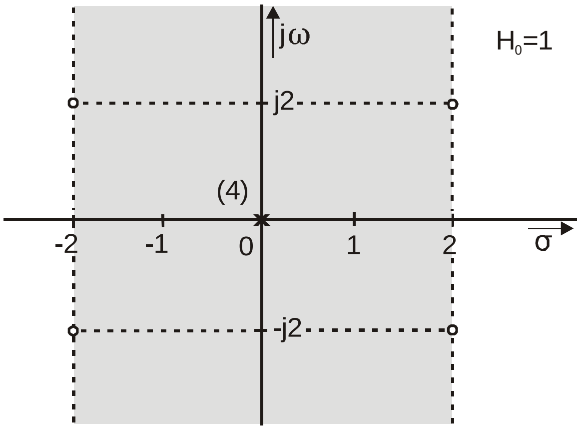
n)



o)



p)



Aufgabe 5.7

Berechnen sie die inverse Laplace-Transformierte $f(t)$ von

$$F(s)=\frac{2-2s}{(s+1)(s+2)(s+5)}\text{, wobei der Konvergenzbereich } \operatorname{Re}\{s\}>-1 \text{ ist,}$$

mit Hilfe der Partialbruchzerlegung (5.35).

Aufgabe 5.8

Berechnen Sie die inverse Laplace-Transformierte $f(t)$ von

$$F(s)=\frac{2s-1}{(s+1)^3(s+4)}, \qquad \operatorname{Re}\{s\}>-1 \qquad \text{mit Hilfe}$$

der Partialbruchzerlegung (5.44) (Polstelle des Grades 3).

Aufgabe 5.9

Eine sinusförmige Wechselspannungsquelle $u_1(t)=A\sin(\omega_0 t)$ wird zum Zeitpunkt $t=0$ auf einen $R/L-$Hochpass $\left(\frac{L}{R}=T\right)$ geschaltet.

a) Geben Sie die Laplace-Übertragungsfunktion $H(s)$ des Systems an.

b) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $U_1(s)$ der Erregungsfunktion $u_1(t)$ für $t\geq 0$.

c) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte $U_2(s)$ der Ausgangsspannung $u_2(t)$.

d) Berechnen Sie damit den Spannungsverlauf $u_2(t)$ am Ausgang.

Aufgabe 5.10

Welche der in Aufgabe 5.6 durch Pol-Nullstellen-Diagramme beschriebenen Systeme a) bis p) sind stabil, nicht stabil oder diesbezüglich nicht definiert? Geben Sie die Kriterien für stabile Systeme an.

Aufgabe 5.11

Man betrachte den $RLC-$Schwingkreis aus Abb. 5.6.

a) Zeigen Sie, dass das System für positive Werte R, L und C immer stabil ist.

b) Geben Sie Beziehungen zwischen R, L und C an, so dass sich ein Butterworth-Tiefpassfilter der Grenzfrequenz ω_g ergibt.

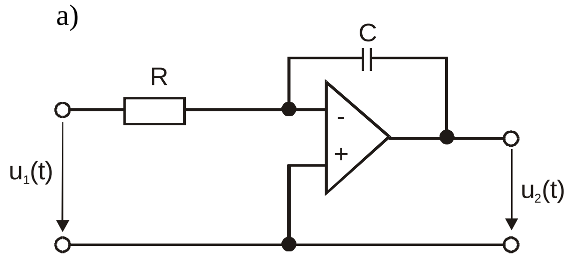
Aufgabe 5.12

Es sollen die unten dargestellten Operationsverstärkerschaltungen betrachtet werden. Die Operationsverstärker sind als ideal anzunehmen (Eingangswiderstand $R_i \to \infty$, Ausgangswiderstand $R_a \to 0$, Verstärkung $v_0 \to \infty$).

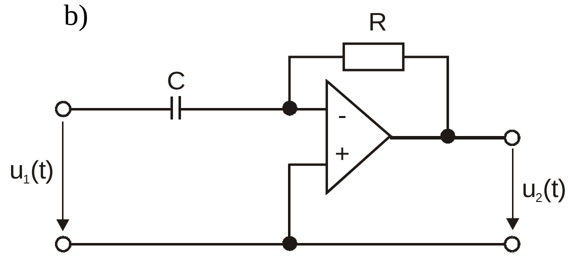
Berechnen Sie jeweils die Übertragungsfunktion $H(s) = U_2(s)/U_1(s)$ der Netzwerke.

Skizzieren Sie die jeweiligen Pol-Nullstellen-Diagramme und schraffieren Sie die zugehörigen Konvergenzgebiete.

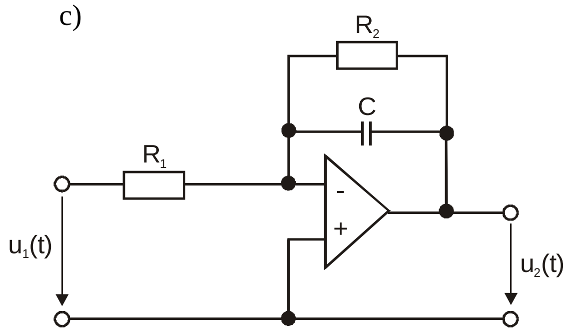
a)



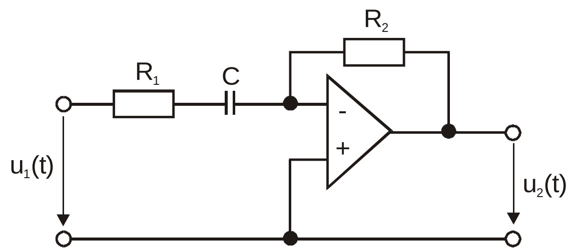
b)



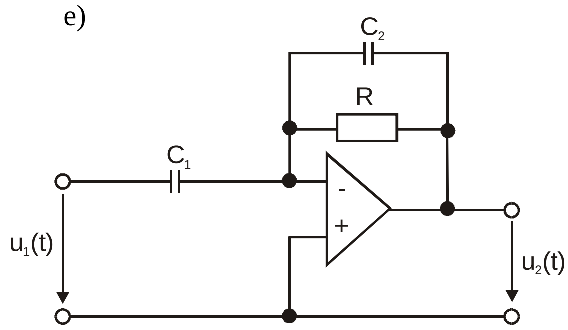
c)



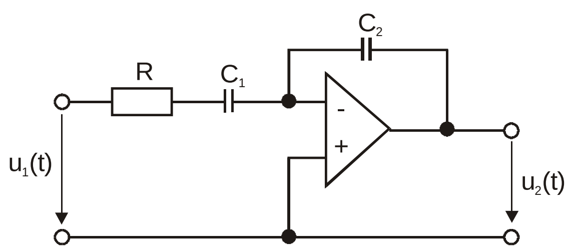
d)



e)



f)



Aufgabe 6.1

Ein ideales Abtastsystem wird durch

$$g(t) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

beschrieben. Ist das System linear? Ist es zeitinvariant?

Aufgabe 6.2

$s(t) = \cos(\omega_0 t)$ wird mit einem idealen Abtaster abgetastet mit einer Abtastfrequenz

$$\omega_{T_1} = \frac{3}{4}\omega_0; \qquad \omega_{T_2} = \frac{5}{4}\omega_0 \quad \text{und} \quad \omega_{T_3} = \frac{9}{4}\omega_0 .$$

a) Bestimmen und skizzieren Sie jeweils die Fourier – Transformierten $S_a(j\omega)$ der abgetasteten Signale

b) Die abgetasteten Signale werden jeweils durch einen idealen Tiefpass $H(j\omega)$ der Grenzfrequenz $\omega_g = 1,2\,\omega_0$ bandbegrenzt. Bestimmen Sie jeweils die Ausgangssignale für die drei Fälle.

c) Welche <u>minimale</u> Abtastfrequenz ω_T liefert eine fehlerfreie Rekonstruktion von $s(t)$ mit dem Tiefpass nach 1.2?

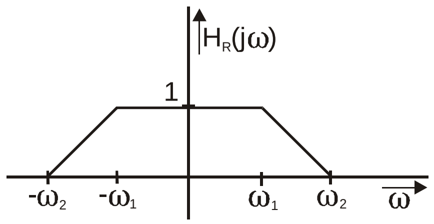
Aufgabe 6.3

Ein Fernsprechsignal mit dem Spektrum $S(j\omega) = \begin{cases} 1 - \left|\dfrac{\omega}{\omega_g}\right| & \textit{für} \quad |\omega| \le \omega_g \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$ habe eine Grenzfrequenz $\omega_g = 2\pi f_g$ (mit $f_g = 4\,kHz$).

a) Wie groß ist die Nyquist-Rate ω_N bei idealer Abtastung?

Skizzieren sie das Spektrum $S_a(j\omega)$ des abgetasteten Signals.

b) Zur Rekonstruktion des Fernsprechsignals aus dem abgetasteten Signal soll ein Tiefpass $H_R(j\omega)$ mit endlicher Flankensteilheit verwendet werden.



Wie müssen Abtastfrequenz ω_T und ω_1 mindestens gewählt werden, damit eine fehlerfreie Interpolation möglich ist?

c) Skizzieren sie das Spektrum $S_a(j\omega)$ des abgetasteten Signals nach b).

Aufgabe 6.4

Das Signal $s(t) = \frac{\omega_g}{\pi} si(\omega_g t)$ wird

a) mit der Nyquist-Rate $\omega_T = 2\omega_g$

b) mit der doppelten Nyquist-Rate abgetastet.

Skizzieren Sie das Spektrum des abgetasteten Signals und den Interpolationsvorgang qualitativ (wie Abb. 6.6)

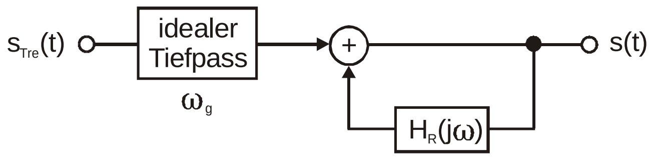
Aufgabe 6.5

Ein Tiefpasssignal der Grenzfrequenz ω_g wird mit der Abtastfrequenz $\omega_T = 2\omega_g$ ideal abgetastet und durch eine Treppenkurve $s_{Tre}(t)$ näherungsweise rekonstruiert.

a) Beschreiben Sie die Treppenkurve $s_{Tre}(t)$ im Zeit- und Frequenzbereich.

b) Geben Sie die Übertragungsfunktion eines Filters an, mit dem $s(t)$ aus $s_{Tre}(t)$ fehlerfrei rekonstruiert werden kann. (Zeitverzögerungen werden nicht berücksichtigt!)

c) Zeigen Sie, dass ein derartiger Filter durch die skizzierte Schaltung realisiert werden kann.



Bestimmen Sie $H_R(j\omega)$.

Aufgabe 6.6

Gegeben ist der zeitdiskrete Rampenimpuls

$$s(n) = n\left[\varepsilon(n) - \varepsilon(n-5)\right]$$

Skizzieren Sie damit folgende Signale

a)	$s(n)$	b)	$s(n+2)$
c)	$s(-n)$	d)	$s(1-n)$
e)	$2s(n)\cdot\varepsilon(n-2)$	f)	$s(2n)$
g)	$s(n)\cdot\delta(n-2)$	h)	$g(n) = \sum\limits_{m=-\infty}^{n} s(m)$
i)	$s(n) - s(n-1)$	j)	$g(n) = \begin{cases} s\left(n/2\right) & n \quad gerade \\ 0 & n \quad ungerade \end{cases}$

Aufgabe 6.7

Zwei zeitdiskrete Rechteckfunktionen $s_1(n)$ und $s_2(m)$,

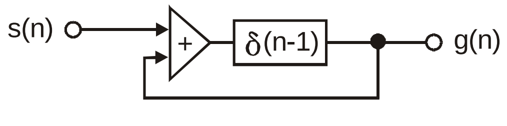
$$s_{1,2}(n) = \varepsilon\left(n + M_{1,2}\right) - \varepsilon\left(n - \left(M_{1,2} + 1\right)\right) \qquad (6.21)$$

mit $M_1 = 2$ und $M_2 = 5$, werden miteinander gefaltet.

Skizzieren Sie $g(n) = s_1(n) * s_2(n)$.

Aufgabe 6.8

Gegeben ist das folgende zeitdiskrete Filter



a)	Skizzieren Sie $g(n)$	für	$s(n) = \delta(n)$
b)	Skizzieren Sie $g(n)$	für	$s(n) = \varepsilon(n)$

Aufgabe 6.9

Gegeben ist $s(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)-\delta(n-3)$ und
$h(n)=2\delta(n+1)+2\delta(n-1)$

Skizzieren Sie $g_1(n)=s(n)*h(n+2)$
und $g_2(n)=s(n+2)*h(n)$

Aufgabe 6.10

Ein LSI-System habe die Impulsantwort

$$h(n)=\left(\frac{1}{5}\right)^n \varepsilon(n)$$

a) Wie muss a gewählt werden, so dass $h(n)+ah(n-1)=\delta(n)$?

b) Wie lautet die Impulsantwort $h_1(n)$ des faltungsinversen Systems, d.h. so dass

$$h(n)*h_1(n)=\delta(n)$$

c) Skizzieren Sie das Blockschaltbild eines IIR-Filters mit der Impulsantwort $h(n)$.

Aufgabe 6.11

Ein kausales LSI-System wird durch die Differenzengleichung

$$g(n)=\frac{1}{4}g(n-1)+s(n)$$ beschrieben.

Wie lautet die Impulsantwort $h(n)$?

Aufgabe 6.12

Ein LSI-System wird durch folgende Differenzengleichung beschrieben:

$$g(n)-2g(n-1)=s(n)+2s(n-2).$$

a) Skizzieren Sie die Struktur des diskreten Filters.

b) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h(n)$.

Aufgabe 6.13

Berechnen Sie die Fourier-Transformierten der folgenden zeitdiskreten Signale:

a) $\delta(n-n_0)$

b) $s(n-n_0)$

c) $\delta(n-1)+\delta(n+1)$

d) $\delta(n+2)-\delta(n-2)$

e) $s(n)=a^{|n|}\ \mathit{für}\ |a|<1$

f) $s(n)-s(n-1)$

g) $s(n)+s(n-1)$

h) $n\cdot s(n)$

i) $s(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}\varepsilon(n-1)$

Aufgabe 6.14

Gegeben ist ein zeitdiskreter Rechteckimpuls

$$s(n)=\delta(n+1)+\delta(n)+\delta(n-1)$$

a) Bestimmen Sie seine Fourier-Transformation $S(j\Omega)$.

Skizzieren Sie $S(j\Omega)$ und geben Sie die Lage der Nullstellen in der ersten Periode an.

b) Berechnen Sie die $z-$Transformation $S_z(z)$ und skizzieren Sie die Pole und Nullstellen in der komplexen $z-$Ebene.

c) Verifizieren Sie $S(j\Omega)$ indem Sie $S_z\left(e^{j\Omega}\right)$ bilden.

Vergleichen Sie die Lage der Nullstellen von $S_z(z)$ mit den Nullstellen von $S(j\Omega)$.

Aufgabe 6.15

Gegeben ist das zeitdiskrete Signal

$$s(n)=7\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\varepsilon(n)-6\left(\frac{1}{2}\right)^n\varepsilon(n)$$

a) Bestimmen Sie die $z-$Transformation $S(z)$.

b) Skizzieren Sie in der $z-$Ebene die Pole und Nullstellen und geben Sie den Konvergenzbereich an.

Aufgabe 6.16

Gegeben ist die $z-$Transformierte

$$S(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}$$

a) Skizzieren Sie alle Pole und Nullstellen in der $z-$Ebene.

b) Geben Sie drei mögliche Konvergenzbereiche und die Eigenschaften der zugehörigen zeitdiskreten Signale $s_{1,2,3}(n)$ an.

c) Für welchen Konvergenzbereich existiert auch eine Fourier-Transformierte?

Aufgabe 6.17

Gegeben ist die $z-$Transformierte

$$S(z)=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} \quad , \quad |z|>\frac{1}{3}$$

a) Bestimmen Sie über eine Partialbruchzerlegung und mit Tabellenbenutzung $s(n)$.

b) Der Konvergenzbereich sei nun $\frac{1}{4}<|z|<1/3$. Bestimmen Sie $s(n)$.

c) Der Konvergenzbereich sei nun $|z|<1/4$. Bestimmen Sie $s(n)$.

d) Geben Sie für den Konvergenzbereich $|z|>\frac{1}{3}$ eine Schaltung zur Erzeugung von $s(n)$ aus einem Einheitsimpuls $\delta(n)$ an.

Aufgabe 6.18

Gegeben ist die $z-$Transformation

$$S(z)=4z^{2}+2+3z^{-1}\ ,0<|z|<\infty$$

Bestimmen Sie $s(n)$.

Aufgabe 6.19

Gegeben ist die Differenzengleichung eines Systems (s. Aufg. 6.12)

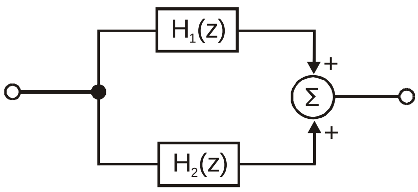
$$g(n) - 2g(n-1) = s(n) + 2s(n-2).$$

a) Bestimmen Sie durch Anwendung der $z-$Transformation die Übertragungsfunktion $H(z)$.

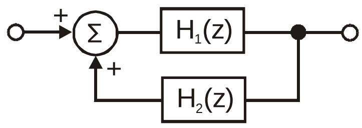
b) Begründen Sie anhand der Lage der Pole und Nullstellen in der $z-$Ebene, ob das System stabil und kausal ist.

Aufgabe 6.20

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen $H(z)$ der folgenden Systeme als Funktion von $H_1(z)$ und $H_2(z)$.

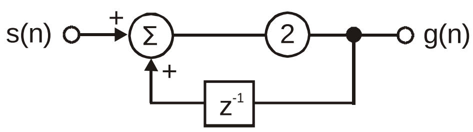
a)


b)


c)


Aufgabe 6.21

Gegeben ist ein $IIR-$Filter gemäß Abbildung.



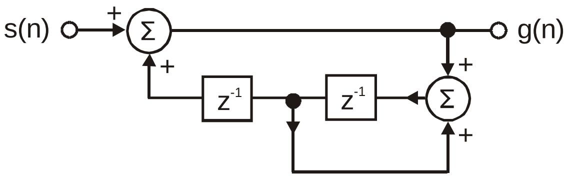
a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(z) = \dfrac{G(z)}{S(z)}$ und geben Sie unter Beachtung der Kausalität des Filters das Konvergenzgebiet an.

b) Skizzieren Sie das Pol-Nullstellendiagramm in der $z-$Ebene und kennzeichnen Sie das Konvergenzgebiet. Ist das System stabil?

c) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Filters.

Aufgabe 6.22

Ein weiteres $IIR-$Filter ist gegeben.



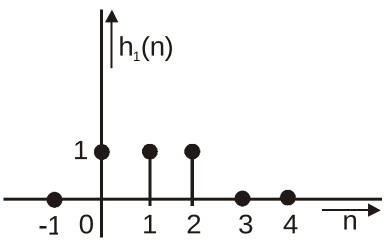
a) Bestimmen Sie seine Übertragungsfunktion $H(z)=\dfrac{G(z)}{S(z)}$

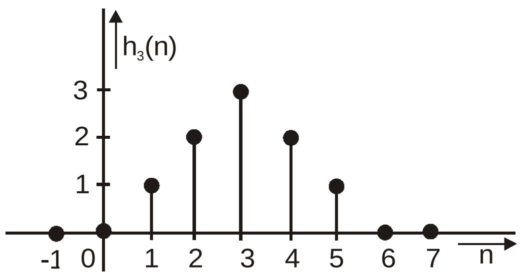
b) Skizzieren Sie das Pol-Nullstellendiagramm in der $z-$Ebene und kennzeichnen Sie das Konvergenzgebiet.

c) Bestimmen Sie $h(n)$ nach Partialbruchzerlegung von $H(z)$ und Anwendung der Tabelle 6.2.

Aufgabe 6.23

Gegeben sind $h_1(n)$ und $h_3(n)$





Gesucht wird $h_2(n)$ für das gilt: $h_3(n)=h_1(n)*h_2(n)$

a) Bestimmen Sie zunächst $H_1(z)$ mit Angabe des Konvergenzgebietes.

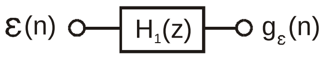
b) Skizzieren Sie das Pol-Nullstellen-Diagramm und kennzeichnen Sie das Konvergenzgebiet.

c) Bestimmen Sie $h_2(n)$ durch Ausnutzung der Faltungseigenschaften der $z-$Transformation. Welches Konvergenzgebiet hat $H_2(z)$?

Aufgabe 6.24

Die Sprungantwort $g_\varepsilon(n)$ eines zeitdiskreten Systems mit der Übertragungsfunktion $H_1(z)$ sei gegeben:

$$g_\varepsilon(n) = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \varepsilon(n)$$



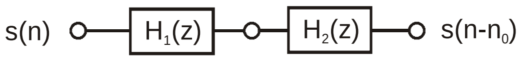
a) Bestimmen Sie die z – Transformierte $G_\varepsilon(z)$ der Sprungantwort des Systems und geben Sie das Konvergenzgebiet an.

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H_1(z)$ und das zugehörige Konvergenzgebiet.

c) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_1(n)$.

Aufgabe 6.25

Am Eingang der abgebildeten Kettenschaltung liegt eine zeitdiskrete Folge $s(n)$.



$H_1(z)$ aus Aufgabe 6.24

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H_2(z)$, so dass am Ausgang die zeitverzögerte Folge $s(n-n_0)$ erscheint.

b) Bestimmen sie die Impulsantwort $h_2(n)$.

c) Wie groß muss die Zeitverzögerung n_0 mindestens gewählt werden, damit sich $H_2(z)$ physikalisch realisieren lässt?

Skizzieren Sie eine einfache Realisierung für $H_2(z)$.

Aufgabe 7.1

Am Eingang einer leerlaufenden Leitung der Länge l liegt eine Spannungsquelle mit $\overrightarrow{U_0}$ und dem Innenwiderstand $\overrightarrow{Z_i}$.

a) Berechnen Sie das Verhältnis der Leerlaufspannung $\overrightarrow{U_2}$ zu $\overrightarrow{U_0}$.

b) Es sei $\overrightarrow{Z_i} = \overrightarrow{Z}$ (Wellenwiderstand der Leitung) und $\alpha l = \ln 5$ sowie $\beta l = 3\pi/4$.

Berechnen Sie $\left|\frac{\overrightarrow{U_2}}{\overrightarrow{U_0}}\right|$ in dB.

Aufgabe 7.2

Die Leitung nach 7.1 werde mit $\overrightarrow{Z_a}$ belastet. Berechnen Sie $\overrightarrow{U_2}/\overrightarrow{U_0}$

d) in allgemeiner Form und

e) für eine verlustfreie Leitung, d.h. $R' = G' = 0$.

f) Für $\alpha = 0$ und $l = \frac{\pi}{2\beta}$

g) Welche Größe muss der Wellenwiderstand $\vec{Z}$ bei der Leitung nach c) haben, damit bei reellen Abschlüssen $\left|\overrightarrow{U_2}\right|$ möglichst groß wird?

Aufgabe 7.3

Für eine verlustlose Leitung ist der Verlauf des Eingangswiderstandes in Abhängigkeit von der Leitungslänge zu berechnen, wenn

d) das Leitungsende kurzgeschlossen und wenn

e) das Leitungsende offen ist.

Aufgabe 7.4

Berechnen Sie den Eingangswiderstand $\overrightarrow{Z_1}$ einer verlustlosen Leitung, die mit $\overrightarrow{Z_a}$ abgeschlossen ist, in allgemeiner Form und für die Werte

$\vec{Z} = 60\,\Omega,\ \overrightarrow{Z_a} = 30\,\Omega,$ wenn die Leitungslänge

a) $l = \lambda/2$ und b) $l = \lambda/4$ beträgt. (Es gilt: $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$)

Aufgabe 7.5

Ein Koaxialkabel der Länge $l = 20\,m$ kann als verlustlos betrachtet werden. Es wird eingangsseitig durch eine $16\,MHz$ Wechselspannung von $1V_{eff}$ gespeist.

Zeichnen Sie den Verlauf $\left|\vec{U}(s)\right|$ über die Kabellänge l.

a) wenn das Leitungsende offen ist, und

b) wenn die Leitung mit dem Wellenwiderstand $\vec{Z}$ abgeschlossen ist.

Hinweis: Für die Leitung gilt: $\sqrt{L'C'} = 3,466 \cdot 10^{-9}\,\frac{s}{m}$.

Berechnen Sie β und damit die örtliche Wellenlänge λ.