RWTH

LEHRSTUHL
UND INSTITUT FÜR
NACHRICHTENTECHNIK

Jens-Rainer Ohm

Formelsammlung zur Vorlesung

Grundgebiete der Elektrotechnik IV

Grundlegende mathematische Formeln

Beziehungen von Exponential-, Sinus- und Cosinusfunktionen; si-Funktion

$$\cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j} \qquad \cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha-\beta\right)+\sin\left(\alpha+\beta\right)\right]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right] \quad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)+\cos\left(\alpha+\beta\right)\right]$$

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{und} \quad \mathrm{Si}(x) = \int_0^x \mathrm{si}\left(\xi\right)d\xi = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \dots$$

Unbestimmte Integrale von Exponentialfunktionen

$$\int e^{at}dt = \frac{1}{a}e^{at} \qquad \int te^{at}dt = \frac{e^{at}}{a^2}\left(at-1\right) \qquad \int t^2e^{at}dt = e^{at}\left(\frac{t^2}{a}-\frac{2t}{a^2}+\frac{2}{a^3}\right)$$

$$\int e^{at}\sin bt\,dt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2}\left(a\sin bt - b\cos bt\right)$$

$$\int e^{at}\cos bt\,dt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2}\left(a\cos bt + b\sin bt\right)$$

Geometrische Reihen

$$\sum_{k=0}^{M} z^k = \begin{cases} \dfrac{1-z^{M+1}}{1-z} & \text{für } z\neq 1 \\ M+1 & \text{für } z=1 \end{cases} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \text{für } |z|<1$$

Nullstellen eines quadratischen Polynoms

$$s^2 + a_1 s + a_0 = \left(s-s_{\mathrm{N},1}\right)\left(s-s_{\mathrm{N},2}\right) \quad \text{mit} \quad s_{\mathrm{N},1/2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^{\,2}}{4}-a_0}$$

Beschreibung zeitkontinuierlicher Signale und Systeme

Betrags- und Phasenübertragungsfunktionen

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}^2 + \mathrm{Im}\{H(j\omega)\}^2} = \sqrt{H(j\omega)\cdot H^*(j\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\frac{\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}} \pm k(\omega)\cdot\pi \quad mit \quad k(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mathrm{Re}\{H(j\omega)\} \ge 0 \\ 1 & \text{für } \mathrm{Re}\{H(j\omega)\} < 0. \end{cases}$$

Linearität und Zeitinvarianz

$$\mathrm{Tr}\left\{\sum_i a_i s_i(t)\right\} \overset{!}{=} \sum_i a_i \,\mathrm{Tr}\{s_i(t)\} = \sum_i a_i g_i(t) \quad \text{und} \quad \mathrm{Tr}\{s(t-t_0)\} = g(t-t_0)$$

Faltungsintegrale

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = s(t)*\delta(t) \qquad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau = s(t)*h(t)$$

Kommutativ- Assoziativ- und Distributivgesetz der Faltung

$$s(t)*h(t) = h(t)*s(t)$$

$$f(t)*s(t)*h(t) = [f(t)*s(t)]*h(t) = f(t)*[s(t)*h(t)]$$

$$f(t)*[s(t)+h(t)] = [f(t)*s(t)] + [f(t)*h(t)]$$

Zerlegung einer reellen Zeitfunktion in gerade und ungerade Komponenten:

$$s(t) = s_\mathrm{g}(t) + s_\mathrm{u}(t) \ \text{mit}$$

$$s_\mathrm{g}(t) = \frac{1}{2}s(t) + \frac{1}{2}s(-t) = s_\mathrm{g}(-t), \qquad s_\mathrm{u}(t) = \frac{1}{2}s(t) - \frac{1}{2}s(-t) = -s_\mathrm{u}(-t).$$

Fourier-Reihenentwicklung eines periodischen Signals

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}dt \;; \qquad s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \;;\; \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Fourier-Reihenentwicklung eines periodischen reellwertigen Signals

$$s(t) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left\{|c_k|\cdot e^{j(k\omega_0 t+\varphi_k)}\right\} = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\cdot\cos(k\omega_0 t+\varphi_k)$$

$$= c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mathrm{Re}\{c_k\}\cos(k\omega_0 t) - \mathrm{Im}\{c_k\}\sin(k\omega_0 t)\right]$$

mit

$$c_k = |c_k|e^{j\varphi_k} \ \text{mit} \ |c_k| = \sqrt{\left(\mathrm{Re}\{c_k\}\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\{c_k\}\right)^2}$$

$$\text{und } \varphi_k = \arctan\frac{\mathrm{Im}\{c_k\}}{\mathrm{Re}\{c_k\}} \pm \kappa(k)\cdot\pi \quad ; \quad \kappa(k) = \begin{cases} 0, \mathrm{Re}\{c_k\} \ge 0 \\ 1, \mathrm{Re}\{c_k\} < 0 \end{cases}$$

Fourier-Transformation für aperiodische und periodische Signale

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot e^{-j\omega t}dt \qquad s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} S(j\omega) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\delta(\omega - k\omega_0)$$

Tabellen zur Fourier-Transformation und Fourier-Reihenentwicklung

Tabelle 1. Elementare Fourier-Transformationspaare

Signal	Fourier-Transformierte	Fourier-Reihe (wenn periodisch)
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0)$	c_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	$c_1 = 1 \;\; ; \;\; c_k = 0$ für $k \neq 1$
$\cos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$	$\pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$	$c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2} \;\; ; \;\; c_k = 0$ für $\lvert k\rvert \neq 1$
$\sin\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$	$\frac{\pi}{j}\delta(\omega-\omega_0) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega+\omega_0)$	$c_1 = -c_{-1} = \frac{1}{2j} \;\; ; \;\; c_k = 0$ für $\lvert k\rvert \neq 1$
$s(t) = c$	$2\pi c \cdot \delta(\omega)$	$c_0 = c \;\; ; \;\; c_k = 0$ für $k \neq 0$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$c_k = \frac{1}{T}$
$\delta(t)$	1	Signal ist aperiodisch
$\delta'(t)$	$j\omega$	Signal ist aperiodisch
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi \cdot \delta(\omega)$	Signal ist aperiodisch
$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$T \cdot \mathrm{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$	Signal ist aperiodisch
$\frac{\omega_g}{\pi}\mathrm{si}\left(\omega_g t\right) = \frac{\omega_g}{\pi} \cdot \frac{\sin\left(\omega_g t\right)}{\omega_g t}$	$\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_g}\right)$	Signal ist aperiodisch
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	Signal ist aperiodisch
$e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \;\; ; \;\; \mathrm{Re}\{\alpha\} > 0$	$\frac{1}{\alpha + j\omega}$	Signal ist aperiodisch
$t \cdot e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \;\; ; \;\; \mathrm{Re}\{\alpha\} > 0$	$\frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$	Signal ist aperiodisch

Tabelle 2. Abbildungseigenschaften bei Fourier-Reihenanalyse periodischer Signale mit Grundperiode T bzw. Grundfrequenz $\omega_0 = 2\pi/T$, d.h. $s(t+T)=s(t)$

Eigenschaft	Zeitbereich	Frequenzbereich
Linearität	$a \cdot s_1(t) + b \cdot s_2(t)$	$a \cdot c^{(1)}{}_k + b \cdot c^{(2)}{}_k$
Zeitverschiebung	$s(t-t_0)$	$c_k e^{-jk\omega_0 t_0}$
Frequenzverschiebung	$s(t) \cdot e^{jM\omega_0 t}$	c_{k-M}
Konjugation	$s^*(t)$	$c^*{}_{-k}$
Zeitspiegelung	$s(-t)$	c_{-k}
Zeitdehnung mit $\alpha > 0$	$s(\alpha t)$ (mit Periode $\frac{\mathrm{T}}{\alpha}$)	c_k (mit geänderter Grundfrequenz $\omega_0{}' = \frac{2\pi\alpha}{T}$)
Periodische Faltung	$\int_T s(\tau)h(t-\tau)d\tau$	$T \cdot c^{(s)}{}_k \cdot c^{(h)}{}_k$
Multiplikation	$s(t) \cdot f(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} c^{(s)}{}_l \cdot c^{(f)}{}_{k-l}$

Differentiation	$\frac{d}{dt}s(t)$	$jk\omega_0 c_k$
Integration (Signal gleichanteilfrei, c_0=0)	$\int_{-\infty}^{t} s(t)dt$	$\frac{1}{jk\omega_0}c_k$
Reellwertiges Signal	$s(t)=s^*(t)$	$c_{-k}=c^*_k$
Gerades reelles Signal	$s(-t)=s(t)$	$\mathrm{Im}\{c_k\}=0$
Ungerades reelles Signal	$s(-t)=-s(t) \quad (\text{mit } s(0)=0)$	$\mathrm{Re}\{c_k\}=0$
Parseval-Theorem	$P=\frac{1}{T}\int_T \lvert s(t)\rvert^2\, dt$	$P=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lvert c_k\rvert^2$

Tabelle 3. Abbildungseigenschaften bei Fourier-Transformation aperiodischer Signale

Eigenschaft	Zeitbereich	Frequenzbereich
Linearität	$a\cdot s_1(t)+b\cdot s_2(t)$	$a\cdot S_1(j\omega)+b\cdot S_2(j\omega)$
Zeitverschiebung	$s(t-t_0)$	$S(j\omega)\cdot e^{-j\omega t_0}$
Frequenzverschiebung	$s(t)\cdot e^{j\omega_0 t}$	$S\left(j(\omega-\omega_0)\right)$
Konjugation	$s^*(t)$	$S^*(-j\omega)$
Zeitinversion	$s(-t)$	$S(-j\omega)$
Zeitdehnung	$s\left(\frac{t}{T}\right)$	$\lvert T\rvert\cdot S(j\omega T)$
Faltung	$s(t)*h(t)$	$S(j\omega)\cdot H(j\omega)$
Multiplikation	$s(t)\cdot h(t)$	$\frac{1}{2\pi}S(j\omega)*H(j\omega)$
Differentiation	$\frac{d}{dt}s(t)$	$j\omega\cdot S(j\omega)$
Integration	$\int_{-\infty}^{t} s(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\omega}S(j\omega)+\pi\cdot S(0)\cdot\delta(\omega)$
vollständige Integration über Zeit bei Energiesignalen	$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)dt$	$S(0)$
vollständige Integration über Frequenz bei Energiesignalen	$s(0)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)d\omega$
Reellwertiges Signal	$s(t)=s^*(t)$	$S(-j\omega)=S^*(j\omega)$
Gerades reelles Signal	$s(-t)=s(t)$	$\mathrm{Im}\{S(j\omega)\}=0$
Ungerades reelles Signal	$s(-t)=-s(t)$	$\mathrm{Re}\{S(j\omega)\}=0$
Parseval-Theorem	$E=\int_{-\infty}^{\infty}\lvert s(t)\rvert^2\, dt$	$E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert S(j\omega)\rvert^2\, d\omega$

Systemeigenschaften, Laplace-Transformation

Dämpfungsmaß:

$$a(\omega) = -20\lg\left|H(j\omega)\right| \text{ dB} = -10\lg\left(\left|H(j\omega)\right|^2\right) \text{ dB}$$

Phasen- und Gruppenlaufzeit:

$$t_p(\omega) = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega} \qquad t_g(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

Klirrfaktor

$$k = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} u^2_{n,eff}}}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} u^2_{n,eff}}} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} \left|c_n\right|^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left|c_n\right|^2}}, \qquad k[dB] = 20\cdot\lg\left(\frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} \left|c_n\right|^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left|c_n\right|^2}}\right) = 10\cdot\lg\left(\frac{\sum_{n=2}^{\infty} \left|c_n\right|^2}{\sum_{n=1}^{\infty} \left|c_n\right|^2}\right).$$

Laplace-Transformation

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \text{ (zweiseitig)} \qquad F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \text{ (einseitig)}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)\cdot e^{st}ds \quad \text{(Wert } \sigma \text{ aus Konvergenzbereich)}$$

Differentialgleichungen und Laplace-Transformierte

$$\sum_{i=0}^{P} \alpha_i \frac{d^i u_2(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{Q} \beta_j \frac{d^j u_1(t)}{dt^j}.$$

$$\left(\sum_{i=0}^{P} \alpha_i s^i\right) U_2(s) = \left(\sum_{j=0}^{Q} \beta_j s^j\right) U_1(s)$$

Polynomzerlegung bei einfachen Polstellen:

$$H(s) = H_0 \frac{\prod_{j=1}^{Q}\left(s - s_{\mathrm{N},j}\right)}{\prod_{i=1}^{P}\left(s - s_{\mathrm{P},i}\right)} = A_0 + \sum_{i=1}^{P} \frac{A_i}{s - s_{\mathrm{P},i}}$$

mit

$$A_0 = \lim_{s\to\infty} H(s) \quad ; \quad A_i = \lim_{s\to s_{\mathrm{P},i}} \left[H(s)\left(s - s_{\mathrm{P},i}\right)\right].$$

Polynomzerlegung bei k-fachen Polstellen:

$$H(s) = H_0 \frac{\left(s - s_{\mathrm{N},1}\right)\left(s - s_{\mathrm{N},2}\right)\cdots\left(s - s_{\mathrm{N},Q}\right)}{\left(s - s_{\mathrm{P},1}\right)\cdots\left(s - s_{\mathrm{P},i}\right)^k\cdots\left(s - s_{\mathrm{P},(P-k+1)}\right)} = A_0 + \frac{A_1}{s - s_{\mathrm{P},1}} + \ldots + \sum_{j=1}^{k} \frac{A_{i,j}}{\left(s - s_{\mathrm{P},i}\right)^j} + \ldots + \frac{A_{(P-k+1)}}{s - s_{\mathrm{P},(P-k+1)}}$$

mit A_0 und A_i für die einfachen Pole wie oben, und

$$A_{i,j} = \frac{1}{(k-j)!} \lim_{s\to s_{\mathrm{P},i}} \frac{d^{(k-j)}}{ds^{(k-j)}}\left[H(s)\left(s - s_{\mathrm{P},i}\right)^k\right]$$

Tabellen zur Laplace-Transformation

Tabelle 4. Elementare Laplace-Transformationspaare

Signal	Laplace-Transformierte	Konvergenzbereich
$\delta(t)$	1	alle s
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}	alle s
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$-\varepsilon(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\}<0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varepsilon(t)=\underbrace{\varepsilon(t)*\ldots*\varepsilon(t)}_{n \text{ Funktionen}}$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varepsilon(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\}<0$
$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-\alpha$ (α reell)
$-e^{-\alpha t}\varepsilon(-t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathrm{Re}\{s\}<-\alpha$ (α reell)
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-\alpha$ (α reell)
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}\varepsilon(-t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\mathrm{Re}\{s\}<-\alpha$ (α reell)
$\cos\omega_0 t\cdot\varepsilon(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$\sin\omega_0 t\cdot\varepsilon(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$-\cos\omega_0 t\cdot\varepsilon(-t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}<0$
$-\sin\omega_0 t\cdot\varepsilon(-t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}<0$
$e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t\cdot\varepsilon(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-\alpha$ (α reell)
$e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t\cdot\varepsilon(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-\alpha$ (α reell)
$-e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t\cdot\varepsilon(-t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}<-\alpha$ (α reell)
$-e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t\cdot\varepsilon(-t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}<-\alpha$ (α reell)

Tabelle 5. Abbildungseigenschaften der ein- und zweiseitigen Laplace-Transformation

Eigenschaft	Zeitbereich	Zweiseitige Transform.	Einseitige Transform.
Linearität	$a\cdot f_1(t)+b\cdot f_2(t)$	$a\cdot F_1(s)+b\cdot F_2(s)$	$a\cdot F_1(s)+b\cdot F_2(s)$
Zeitverschiebung	$f(t-t_0)$	$F(s)\cdot e^{-st_0}$	$F(s)\cdot e^{-st_0}$ wenn $f(t)=0$ für $t<t_0$, $t_0>0$
Verschiebung in s	$f(t)\cdot e^{s_0 t}$	$F(s-s_0)$	$F(s-s_0)$
Konjugation	$f^*(t)$	$F^*(s^*)$	$F^*(s^*)$
Zeitinversion	$f(-t)$	$F(-s)$	nicht anwendbar
Zeitdehnung	$f\left(\frac{t}{T}\right)$	$\lvert T\rvert\cdot F(sT)$	$\lvert T\rvert\cdot F(sT)$
Faltung	$f(t)*h(t)$	$F(s)\cdot H(s)$	$F(s)\cdot H(s)$
Differentiation	$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$	$s^n\cdot F(s)$	$s^n\cdot F(s)$ wenn $f(t)=0$ für $t<0$
Integration	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$	$\frac{1}{s}F(s)$ wenn $f(t)=0$ für $t<0$

Beschreibung zeitdiskreter Signale und Systeme

Ideale Abtastung und Rekonstruktion eines bandbegrenzten Signals:

$$s_a(t)=s(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-nT\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s(nT)\delta\left(t-nT\right)$$

$$S_{\mathrm{a}}(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}S\left[j\left(\omega-n\omega_T\right)\right]\quad\text{mit}\quad\omega_T=\frac{2\pi}{T}$$

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s(nT)\,\mathrm{si}\left(\pi\frac{t-nT}{T}\right)$$

Diskrete Faltung

$$g(nT)=T\sum_{m=-\infty}^{\infty}s(mT)h\left[(n-m)T\right]$$

$$g(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}s(m)h(n-m)=s(n)*h(n)$$

$$s(n)=\delta(n)*s(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}s(m)\delta(n-m)$$

Linearität und Verschiebungsinvarianz

$$\mathrm{Tr}\left\{\sum_i a_i s_i(n)\right\}=\sum_i a_i\,\mathrm{Tr}_i\left\{s_i(n)\right\}=\sum_i a_i g_i(n)\qquad \mathrm{Tr}\left\{s(n-m)\right\}=g(n-m).$$

Differenzengleichungen und Digitale Filter

$$g(n)-\sum_{p=1}^{P} b_p g(n-p) = a_0 s(n) + \sum_{q=1}^{Q} a_q s(n-q)$$

$$g(n) = \underbrace{\sum_{q=0}^{Q} a_q \cdot s(n-q)}_{\text{FIR-Teil}} + \underbrace{\sum_{p=1}^{P} b_p \cdot g(n-p)}_{\text{IIR-Teil}}$$

Fourier-Transformation (Summe) einer endlichen oder unendlichen Zahlenfolge

$$S(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) e^{-jn\Omega} \quad \text{mit} \quad \Omega = \omega T = 2\pi \frac{\omega}{\omega_T}$$

$$s(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(j\Omega) e^{jn\Omega} d\Omega$$

Diskrete Fourier-Transformation (DFT) eines periodischen zeitdiskreten Signals

(Diskrete Frequenzwerte entsprechen $\Omega_k = 2\pi k/M$)

$$S_\mathrm{p}(k) = \sum_{n=0}^{M-1} s_\mathrm{p}(n) e^{-j\frac{2\pi}{M}nk} \quad ; \quad k = 0, \ldots, M-1$$

$$s_\mathrm{p}(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} S_\mathrm{p}(k) e^{j\frac{2\pi}{M}nk} \quad ; \quad n = 0, \ldots, M-1$$

z-Transformation

$$z = e^{(\sigma + j\Omega)} = e^{\sigma} e^{j\Omega} = \rho e^{j\Omega} \quad ; \quad 0 < \rho < \infty \ \text{ für } \ -\infty < \sigma < \infty$$

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) z^{-n} \ \text{(zweiseitig)} \qquad S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s(n) z^{-n} \ \text{(einseitig)}$$

$$s(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{2\pi\rho} S(z) z^{n-1} dz \ \text{ (Integration auf Kreis mit Radius } \rho \text{ im Konvergenzbereich)}$$

z-Transformierte der Differenzengleichung eines Digitalfilters

$$\sum_{q=0}^{Q} a_q \cdot s(n-q) \overset{z}{\leftrightarrow} S(z) \cdot A(z) \ \text{ mit } \ A(z) = \sum_{q=0}^{Q} a_q \cdot z^{-q}$$

$$\sum_{p=1}^{P} b_q \cdot g(n-p) \overset{z}{\leftrightarrow} G(z) \cdot B(z) \ \text{ mit } \ B(z) = \sum_{p=1}^{P} b_p \cdot z^{-p}$$

$$H(z) = \frac{G(z)}{S(z)} = \frac{A(z)}{1-B(z)} = \frac{\sum_{q=0}^{Q} a_q \cdot z^{-q}}{1 - \sum_{p=1}^{P} b_p \cdot z^{-p}}$$

Tabellen zu Transformationen zeitdiskreter Signale

Tabelle 6. Elementare Fourier-Transformationspaare bei zeitdiskreten Signalen

Signal	Fourier-Transformierte	DFT (wenn periodisch)
$\sum_{k=n_0}^{n_0+N-1} S(k)e^{jk\Omega_0 n}$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} S(k)\delta(\Omega-k\Omega_0)$	$S(k)$
$e^{-j\Omega_1 n}$	$2\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\Omega_1-2\pi l)$	Für $\Omega_1=\frac{2\pi m}{N}$: $S(k)=\begin{cases}N \text{ für k=}m+lN\\ 0 \text{ für k} \neq m+lN\end{cases}$ Sonst stimmt DFT-Länge nicht mit Signalperiode überein, so dass typischerweise alle $S(k)\neq 0$
$\cos\Omega_1 n=\frac{e^{j\Omega_1 n}+e^{-j\Omega_1 n}}{2}$	$\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left[\delta(\Omega-\Omega_1-2\pi l)+\delta(\Omega+\Omega_1-2\pi l)\right]$	Für $\Omega_1=\frac{2\pi m}{N}$: $S(k)=\begin{cases}\frac{N}{2} \text{ für k=}\pm m+lN\\ 0 \text{ für k} \neq \pm m+lN\end{cases}$ Sonst: s.o.
$\sin\Omega_1 n=\frac{e^{j\Omega_1 n}-e^{-j\Omega_1 n}}{2j}$	$\frac{\pi}{j}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left[\delta(\Omega-\Omega_1-2\pi l)-\delta(\Omega+\Omega_1-2\pi l)\right]$	Für $\Omega_1=\frac{2\pi m}{N}$: $S(k)=\begin{cases}\pm\frac{N}{2j} \text{ für k=}\pm m+lN\\ 0 \text{ für k} \neq \pm m+lN\end{cases}$ Sonst: s.o.
$s(n)=c$	$2\pi c\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi l)$	$S(k)=\begin{cases}cN \text{ für k=}lN\\ 0 \text{ für k} \neq lN\end{cases}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kN)$	$\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$	$S(k)=1$
$\delta(n)$	1	Signal ist aperiodisch
$\varepsilon(n)$	$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$	Signal ist aperiodisch
$\delta(n-n_0)$	$e^{-j\Omega n_0}$	Signal ist aperiodisch
$b^n\varepsilon(n)\quad;\quad \lvert b\rvert<1$	$\frac{1}{1-be^{-j\Omega}}$	Signal ist aperiodisch

Tabelle 7. Elementare *z*-Transformationspaare

Signal	*z*-Transformierte	Konvergenzbereich
$\delta(n)$	1	alle z
$\varepsilon(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>1$
$-\varepsilon(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert<1$
$\delta(n-n_0)$	z^{-n_0}	alle z, außer $z=0$ (wenn $n_0>0$) oder $z=\infty$ (wenn $n_0<0$)
$b^n\varepsilon(n)$	$\frac{1}{1-bz^{-1}}$	$\lvert z\rvert>\lvert b\rvert$
$-b^n\varepsilon(-n-1)$	$\frac{1}{1-bz^{-1}}$	$\lvert z\rvert<\lvert b\rvert$
$n\cdot b^n\varepsilon(n)$	$\frac{bz^{-1}}{\left(1-bz^{-1}\right)^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert b\rvert$

$-n \cdot b^n \varepsilon(-n-1)$	$\frac{bz^{-1}}{\left(1-bz^{-1}\right)^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert b\rvert$
$\cos\Omega_1 n \cdot \varepsilon(n)$	$\frac{1-\cos\Omega_1 \cdot z^{-1}}{1-2\cos\Omega_1 \cdot z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin\Omega_1 n \cdot \varepsilon(n)$	$\frac{\sin\Omega_1 \cdot z^{-1}}{1-2\cos\Omega_1 \cdot z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$b^n \cos\Omega_1 n \cdot \varepsilon(n)$	$\frac{1-b\cos\Omega_1 \cdot z^{-1}}{1-2b\cos\Omega_1 \cdot z^{-1}+b^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert b\rvert$
$b^n \sin\Omega_1 n \cdot \varepsilon(n)$	$\frac{b\sin\Omega_1 \cdot z^{-1}}{1-2b\cos\Omega_1 \cdot z^{-1}+b^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert b\rvert$

Tabelle 8. Eigenschaften der Fourier-Transformation aperiodischer zeitdiskreter Signale, Spektren mit $\Omega=2\pi$ periodisch

Eigenschaft	Zeitbereich	Frequenzbereich
Linearität	$a \cdot s_1(n) + b \cdot s_2(n)$	$a \cdot S_1(j\Omega) + b \cdot S_2(j\Omega)$
Zeitverschiebung	$s(n-n_0)$	$S(j\Omega) \cdot e^{-j\Omega n_0}$
Frequenzverschiebung	$s(n) \cdot e^{j\Omega_0 n}$	$S\left(j(\Omega-\Omega_0)\right)$
Konjugation	$s^*(n)$	$S^*(-j\Omega) = S^*\left(j(2\pi-\Omega)\right)$
Zeitinversion	$s(-n)$	$S(-j\Omega) = S\left(j(2\pi-\Omega)\right)$
Faltung	$s(n) * h(n)$	$S(j\Omega) \cdot H(j\Omega)$
Multiplikation	$s(n) \cdot h(n)$	$\frac{1}{2\pi}\left[S(j\Omega) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)\right] * H(j\Omega)$ $= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S\left(j\Theta\right) H\left(j(\Theta-\Omega)\right) d\Theta$
Differenzenbildung	$s(n) - s(n-1)$	$\left(1-e^{-j\Omega}\right) S(j\Omega)$
Akkumulation	$\sum_{k=-\infty}^{n} s(k)$	$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} S(j\Omega) + \pi \cdot S(0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - 2\pi k\right)$
Vollständige Akkumulation über Zeit bei Energiesignalen	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k)$	$S(0)$
Integration über eine Frequenzperiode bei Energiesignalen	$s(0)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(j\Omega) d\Omega$
Reellwertiges Signal	$s(n) = s^*(n)$	$S(-j\Omega) = S^*(j\Omega) = S\left(j(2\pi-\Omega)\right)$
Gerades reelles Signal	$s(-n) = s(n)$	$\mathrm{Im}\left\{S(j\Omega)\right\} = 0$
Ungerades reelles Signal	$s(-n) = -s(n)$	$\mathrm{Re}\left\{S(j\Omega)\right\} = 0$
Parseval-Theorem	$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert s(n)\rvert^2$	$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lvert S(j\Omega)\rvert^2 d\Omega$

Tabelle 9. Eigenschaften der Diskreten Fourier-Transformation periodischer Signale mit Grundperiode N bzw. Grundfrequenz $\Omega_0=2\pi/N$, d.h. $s(n+N)=s(n)$ und ebenfalls periodischer diskreter Koeffizienten $S(k+N)=S(k)$ (Anmerkung: Diese Art von Signalen und DFT-Spektren wurde oben mit $s_P(n)$ bzw. $S_P(k)$ bezeichnet)

Eigenschaft	Zeitbereich	Frequenzbereich
Linearität	$a\cdot s_1(n)+b\cdot s_2(n)$	$a\cdot S_1(k)+b\cdot S_2(k)$
Zeitverschiebung	$s(n-n_0)$	$S(k)e^{-jk\Omega_0 t_0}$
Frequenzverschiebung	$s(n)\cdot e^{jM\Omega_0 t}$	$S(k-M)$
Konjugation	$s^*(n)$	$S^*(-k)=S^*(N-k)$
Zeitspiegelung	$s(-n)$	$S(-k)=S(N-k)$
Periodische Faltung	$\sum_{k=n_0}^{n_0+N-1} s(k)h(n-k)$	$N\cdot S_k H_k$
Multiplikation	$s(n)\cdot f(n)$	$\sum_{l=k_0}^{k_0+N-1} S(l)\cdot F(k-l)$
Differenzbildung	$s(n)-s(n-1)$	$\left(1-e^{-jk\Omega_0}\right)S(k)$
Akkumulation (Signal gleichanteilfrei, $S(0)=0$)	$\sum_{k=-\infty}^{n} s(k)$	$\frac{1}{1-e^{-jk\Omega_0}}S(k)$
Reellwertiges Signal	$s(n)=s^*(n)$	$S(-k)=S(N-k)=S^*(k)$
Gerades reelles Signal	$s(-n)=s(n)$	$\mathrm{Im}\{S(k)\}=0$
Ungerades reelles Signal	$s(-n)=-s(n)$	$\mathrm{Re}\{S(k)\}=0$
Parseval-Theorem	$P=\frac{1}{N}\sum_{k=n_0}^{n_0+N-1}\lvert s(k)\rvert^2$	$P=\sum_{k=k_0}^{k_0+N-1}\lvert S(k)\rvert^2$

Tabelle 10. Eigenschaften der z-Transformation

Eigenschaft	Zeitbereich	zweiseitige z-Transf.	einseitige z-Transf.
Linearität	$a\cdot s_1(n)+b\cdot s_2(n)$	$a\cdot S_1(z)+b\cdot S_2(z)$	$a\cdot S_1(z)+b\cdot S_2(z)$
Zeitverschiebung	$s(n-n_0)$	$S(z)\cdot z^{-n_0}$	Anwendung erfordert Beachtung der Summationsgrenzen, s. folgende Zeilen
Sample delay	$s(n-1)$	$S(z)\cdot z^{-1}$	$S(z)\cdot z^{-1}+s(-1)$
Sample advance	$s(n+1)$	$S(z)\cdot z$	$S(z)\cdot z-z\cdot s(0)$
Frequenzverschiebung	$s(n)\cdot e^{j\Omega_1 n}$	$S\left(z\cdot e^{-j\Omega_1}\right)$	$S\left(z\cdot e^{-j\Omega_1}\right)$
Konjugation	$s^*(n)$	$S^*(z^*)$	$S^*(z^*)$
Zeitinversion	$s(-n)$	$S(z^{-1})$	nicht anwendbar
Faltung	$s(n)*h(n)$	$S(z)\cdot H(z)$	$S(z)\cdot H(z)$
Differenzbildung	$s(n)-s(n-1)$	$\left(1-z^{-1}\right)S(z)$	$\left(1-z^{-1}\right)S(z)-s(-1)$
Akkumulation	$\sum_{k=-\infty}^{n} s(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}S(z)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}S(z)$

